

۱- به کمک انتقال، نمودار تابع $f(x) = x^3$ را بر نمودار تابع $g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$ منطبق کرده‌ایم. اگر حین این انتقال، نمودار تابع f را a واحد در راستای افقی و b واحد در راستای عمودی جابه‌جا کرده باشیم، مقدار $|ab|$ کدام است؟ [قلمچی ۱۸ مهر ۱۴۰۴]

(مشابه امتحان نهایی، فروردین ۱۳۹۳)

۱۶ (۱)

۲۴ (۲)

۱۲ (۳)

۳۲ (۴)

۲- تابع $f(x) = \begin{cases} -x+3 & x \geq 3 \\ 2m-mx & x < 3 \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ صعودی است. اگر بازه $[a, b]$ حدود مقادیر m باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟ [قلمچی ۱۸ مهر ۱۴۰۴]

۴ (۱)

-۴ (۲)

-۳ (۳)

۲ (۴)

۳- تابع f با دامنه $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است و مجموعه جواب نامعادله $f(2x^2 - 3) > f(2x + 1)$ بازه (a, b) است. نمودار تابع $y = b - (x - a)^2$ از کدام ناحیه محاورهای مختصات عبور نمی‌کند؟ [قلمچی ۱۸ مهر ۱۴۰۴]

اول (۱)

دوم (۲)

سوم (۳)

چهارم (۴)

۴- کدام یک از توابع داده شده با تابع خطی $y = x - 2$ برابر است؟ [قلمچی ۲۰ آبان ۱۴۰۴]

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2} \quad (۱)$$

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4} \quad (۲)$$

$$h(x) = \frac{x-2}{x} \times \frac{x^2}{x} \quad (۳)$$

$$k(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2} & x \neq -2 \\ -4 & x = -2 \end{cases} \quad (۴)$$

۵- اگر دامنه تابع $y = \frac{x+3}{x^2 + bx + c}$ به صورت $\mathbb{R} - \{-2\}$ باشد، برد تابع $y = \frac{bx+a}{cx+d}$ شامل کدام عدد صحیح نیست؟ ($a \neq d$) [قلمچی ۲۰ آبان ۱۴۰۴]

-۲ (۱)

-۱ (۲)

۱ (۳)

۲ (۴)

۶- نمودار تابع $f(x) = \sqrt{-x^2 - 6x - 5}$ را ابتدا با ضریب ۲ در راستای افقی انبساط می‌دهیم و سپس نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم. نمودار به دست آمده را ۵ واحد به چپ منتقل کرده و سپس با ضریب ۲ در راستای عمودی منبسط می‌کنیم و آن را $g(x)$ می‌نامیم. طول نقطه تقاطع نمودارهای $f(x)$ و $g(x)$ کدام است؟ [قلمچی ۲۰ آبان ۱۴۰۴]

$-\frac{3}{2}$ (۱)

$-\frac{5}{2}$ (۲)

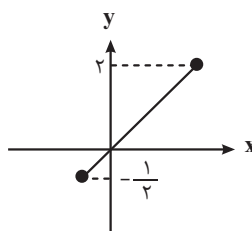
$-\frac{7}{2}$ (۳)

$-\frac{9}{2}$ (۴)

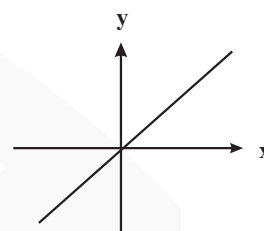
۷- اگر توابع $f(x) = \frac{9-x^2}{x^2+2x}$ و $g(x) = \frac{x^2-x-12}{x^2-2x^2-8x}$ باشند و معادله $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = k$ جواب نداشته باشد، کدام گزینه می تواند باشد؟ [قلمچی ۲۶ آبان ۱۴۰۴]

- (۱) ۱
(۲) -۲
(۳) -۱
(۴) -۴

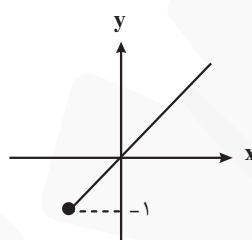
۸- اگر $f(x) = \sqrt{2-x} - 1$ باشد، نمودار تابع $y = f \circ f^{-1}(2x) - f^{-1} \circ f(x)$ برابر با کدام گزینه است؟ [قلمچی ۲۶ دی ۱۴۰۴]



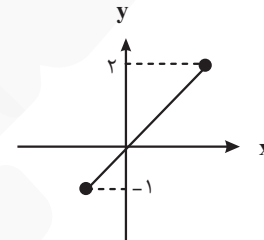
(۲)



(۱)



(۴)



(۳)

۹- نظیر نقطه $A(1, 2)$ واقع بر نمودار $y = 3f(x-2) + 1$ روی نمودار $y = -f^{-1}(2x+1) - 3$ را نقطه B می نامیم. نقطه وسط پاره خط AB کدام است؟ [قلمچی ۲۶ دی ۱۴۰۴]

- (۱) $(\frac{5}{12}, \frac{1}{2})$
(۲) $(\frac{5}{3}, \frac{-1}{2})$
(۳) $(-\frac{3}{7}, -1)$
(۴) $(\frac{3}{7}, \frac{5}{3})$

۱۰- اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = 2x^2 - 1$ ، آنگاه اشتراک دامنه توابع fog و gof کدام گزینه است؟ [ماز ۱۷ مهر ۱۴۰۴]

- (۱) $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ (۲) $(-\infty, -1]$ (۳) $(1, +\infty)$ (۴) $[1, +\infty)$

۱۱- تابع $f(x) = (2x-a)(ax+b) - 4x(x+2)$ هم صعودی است و هم نزولی. مقدار $f(a-2b)$ چه عددی است؟ [ماز ۱۷ مهر ۱۴۰۴]

- (۱) -۱۲ (۲) -۱۰ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

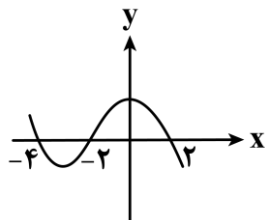
۱۲- اگر ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x^2+1} - 2a & |x| \leq 2 \\ f(0) + 3x^2 - a & |x| \geq 2 \end{cases}$ بیانگر تابع باشد، $f(3)$ چه عددی است؟ [ماز ۱۷ مهر ۱۴۰۴]

- (۱) -۱۱ (۲) -۱۳ (۳) -۹ (۴) -۱۲

۱۳- اگر $f = \{(a^2 - 2a, 1), (-5, 2a), (3, 6), (2a, 6)\}$ تابع نباشد، برای a چند مقدار مختلف یافت می‌شود؟ [ماز ۱۷ مهر ۱۴۰۴]

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۳

۱۴- نمودار مقابل تابع f را نمایش می‌دهد. دامنه تعریف $y = \sqrt{(2-x)f(x)}$ کدام است؟ [ماز ۱۷ مهر ۱۴۰۴]



(۱) $\mathbb{R} - [-4, 2]$

(۲) $[-4, -2] \cup \{2\}$

(۳) $(-4, -2)$

(۴) $\mathbb{R} - (-4, -2)$

۱۵- در بزرگترین بازه‌ای که تابع $f(x) = |1 - 2x| - 3|x - 2|$ نزولی اکید است، ضابطه وارون $y = f(x)$ کدام است؟ [ماز آبان ۱۴۰۴]

(۲) $f^{-1}(x) = \frac{x+7}{5}, x \leq 3$

(۱) $f^{-1}(x) = 5 - x, x \geq 2$

(۴) $f^{-1}(x) = 5 - x, x \leq 3$

(۳) $f^{-1}(x) = x + 5, x \leq \frac{1}{2}$

۱۶- هرگاه داشته باشیم $f(x-2) = \sqrt{ax+b}$ و $g(3-x) = \sqrt{1+4x}$ ، به طوری که توابع $y = f(x)$ و $y = g(x)$ با هم برابر باشند، $b-a$ کدام است؟ [ماز آبان ۱۴۰۴]

- (۱) ۱۹ (۲) ۱۷ (۳) ۲۵ (۴) ۲۱

۱۷- اگر f تابع خطی باشد به طوری که دامنه تعریف $y = \sqrt{f(2x)}$ بازه $[-3, +\infty)$ باشد، دامنه تعریف $y = \sqrt{f(\frac{x}{2})}$ کدام بازه است؟ [ماز آبان ۱۴۰۴]

- (۱) $(-\infty, 12]$ (۲) $(-\infty, -6]$ (۳) $[-12, +\infty)$ (۴) $[-6, +\infty)$

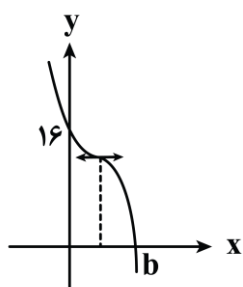
۱۸- f تابع همانی و g تابعی ثابت است به طوری که $4f(1-2x) - 2g(3x) = -8x - 4$ می‌باشد. مقدار $\frac{g(2)}{f(-2)}$ چه عددی است؟ [ماز آبان ۱۴۰۴]

- (۱) -۴ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) ۴

۱۹- اگر دامنه تعریف تابع $f(x) = b + a\sqrt{ax^2 + bx + 6}$ بازه $[-2, 3]$ باشد، برد تابع کدام است؟ [ماز آبان ۱۴۰۴]

- (۱) $[-2, \frac{1}{2}]$ (۲) $[-1, \frac{3}{2}]$ (۳) $[-\frac{1}{2}, 2]$ (۴) $[-\frac{3}{2}, 1]$

۲۰- هرگاه نمودار تابع $f(x) = 4a - (x-a)^2$ به شکل مقابل باشد، مقدار $b-a$ چه عددی است؟ [ماز آبان ۱۴۰۴]



- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) -۱

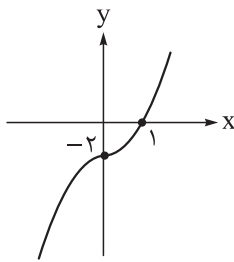
۲۱- اگر n یک عدد طبیعی و تابع $f(x) = ax^2 + (2n-3)x + n$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی باشد، ضابطه وارون تابع $y = f(x)$ [ماز ۲۵ دی ۱۴۰۴] کدام است؟

- (۱) $-f(x)$ (۲) $f(-x)$ (۳) $f(x)$ (۴) $-f(-x)$

۲۲- اگر $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x \geq 2 \\ 1+x & x < 2 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x-2 & f(x) \geq 0 \\ 2-x & f(x) < 0 \end{cases}$ باشد، آن گاه به ازای چند مقدار a رابطه $g(a) = f^{-1}(2)$ برقرار [ماز ۲۵ دی ۱۴۰۴] است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۲۳- شکل مقابل مربوط به نمودار تابع $f(x) = ax^3 + b$ است. اگر تابع $g(x) = \frac{f(x)}{bx+a}$ روی بازه (α, β) یکنوا باشد، حداکثر مقدار $\beta - \alpha$ کدام است؟ $(\alpha < 0 < \beta)$



- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۲ (۴) ۱

۲۴- اگر $y = 2f(2-x)$ تابعی اکیداً صعودی با دامنه $[-4, 5]$ باشد که محور x را فقط در نقطه‌ای به طول ۱- قطع [خیلی سبز ۲۵ مهر ۱۴۰۴] کند، دامنه تابع $g(x) = \sqrt{\frac{f(x)}{x^2-1}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۲۵- توابع $f(x) = [x+1] + [3-x]$ و $g(x) = x^2 + ax - a$ مفروض‌اند. اگر $g \circ f$ تابعی ثابت باشد، کم‌ترین مقدار تابع g [خیلی سبز ۲۵ مهر ۱۴۰۴] کدام است؟ $[]$ ، نماد جزء صحیح است

- (۱) $25/5$ (۲) $5/5$ (۳) $5/6$ (۴) $7/6$

۲۶- توابع $f(x) = 3x + |x|$ و $g(x) = ax - |2x|$ مفروض‌اند. اگر $f \circ g$ تابعی خطی باشد، مقدار a کدام می‌تواند باشد؟ [خیلی سبز ۲۵ مهر ۱۴۰۴]

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

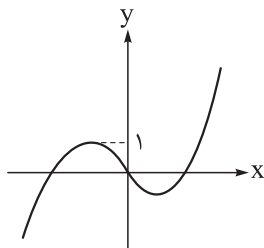
۲۷- اگر در تابع $f = \{(a-b, 2b+c), (b+c-6, a+b+3)\}$ با دو عضو متمایز، مجموع اعضای دامنه با مجموع اعضای برد برابر باشد، کدام نتیجه‌گیری الزاماً درست است؟ [خیلی سبز ۱۶ آبان ۱۴۰۴]

- (۱) $a-2b=c$ (۲) $a-2b \neq c$ (۳) $a-4b=c$ (۴) $a-4b \neq c$

۲۸- اگر دامنه تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{ax|x|(x-2)}{x+a}$ مجموعه $\mathbb{R} - \{2\}$ باشد، برد تابع f کدام عدد را شامل نمی‌شود؟ [خیلی سبز ۱۶ آبان ۱۴۰۴]

- (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) -۴ (۴) -۸

۲۹- شکل زیر نمودار تابع f را نمایش می‌دهد. دامنه تابع g با ضابطه $g(x) = \frac{2^x}{f^2(x) - 3f(x) + 2}$ شامل چند عدد حقیقی نیست؟ [خیلی سبز آبان ۱۴۰۴]



۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

۳۰- اگر دامنه تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{(b-4)x^2 + (3-b)x + 5}}$ بازه $[2, 5]$ باشد، دامنه تابع g با ضابطه $g(x) = \sqrt{(b-1) - \frac{a}{2}x}$ شامل چند عدد طبیعی است؟ [خیلی سبز آبان ۱۴۰۴]

۱ (۲)

۱ (۱) صفر

۳ (۴)

۲ (۳)

۱- گزینه «ا»

(دانیال ابراهیمی)

در تابع $g(x)$ داریم:

$$g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x = (x-2)^3 + 8$$

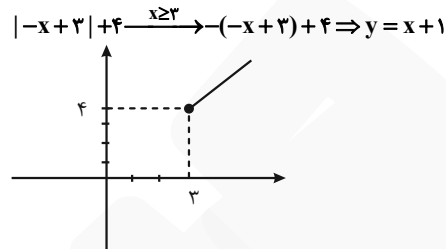
بنابراین نمودار $f(x) = x^3$ ، ۲ واحد به راست رفته ($a=2$) و ۸ واحد به بالا رفته ($b=8$). بنابراین $|ab|=16$ خواهد بود.

(تابع) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۵) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۳ تا ۵)

۲- گزینه «۲»

(امیرمسین حسینی)

ابتدا تابع را در بازه $x \geq 3$ رسم می‌کنیم:



از آنجایی که تابع روی $\mathbb{R}$ صعودی است، باید هر بخش از ضابطه صعودی باشد ($m \leq 0$) و همچنین از انتهای نمودار ضابطه پایین ($x < 3$) به ابتدای نمودار ضابطه بالا ($x \geq 3$) هم صعودی باشد. بنابراین:

$$\begin{aligned} 2m - mx &\xrightarrow{x=3} 2m - 3m \leq 4 \Rightarrow m \geq -4 \\ \left. \begin{array}{l} m \leq 0 \\ m \geq -4 \end{array} \right\} \text{اشتراک} &\Rightarrow -4 \leq m \leq 0 \Rightarrow [a, b] = [-4, 0] \\ \Rightarrow a + b &= -4 + 0 = -4 \end{aligned}$$

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۶ تا ۱۰)

۳- گزینه «۳»

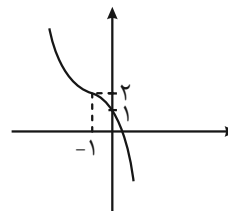
(توفیر اسری)

$$\begin{aligned} f(2x^2 - 3) &> f(2x + 1) \xrightarrow{\text{تابع اکیدا نزولی است}} 2x^2 - 3 < 2x + 1 \\ \Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 &< 0 \\ x^2 - x - 2 < 0 &\Rightarrow -1 < x < 2 \end{aligned}$$

بنابراین $a = -1$ و $b = 2$ داریم:

$$y = b - (x - a)^3 = 2 - (x + 1)^3$$

با توجه به نمودار زیر، تابع از ناحیه سوم عبور نمی‌کند.



(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۶ تا ۱۰)

۴- گزینه «۴»

(ممبر هاروق هدایتی)

دو تابع به شرطی برابرند که ضابطه و دامنه آنها با هم برابر باشند. تابع صورت سؤال $y = x - 2$ با دامنه $D_f = \mathbb{R}$ است. گزینه «۱»:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)} = x - 2$$

از نظر ضابطه برابر است؛ ولی دامنه آن $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$ است.

گزینه «۲»: تابع $g(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$ از نظر ضابطه برابر با تابع صورت سؤال نمی‌شود.

$$h(x) = \frac{x-2}{x} \times \frac{x^2}{x} = x - 2$$

این تابع نیز از نظر ضابطه برابر است؛ اما دامنه آن $D_h = \mathbb{R} - \{0\}$ است. گزینه «۴»:

$$k(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} & x \neq -2 \\ -4 & x = -2 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{✓} \\ \text{✓} \end{matrix}$$

این تابع هم از نظر ضابطه و هم از نظر دامنه با تابع صورت سؤال برابر است.

(تابع) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۵۰ و ۵۱)

۵- گزینه «۳»

(بهزاد مرمی)

با توجه به دامنه، باید مخرج کسر به فرم زیر باشد:

$$(x - (-2))^2 = (x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow b = 4, c = 4$$

$$\Rightarrow y = \frac{4x + a}{4x + d}$$

می‌دانیم در توابع به فرم $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ ، برد تابع به صورت $R_y = \mathbb{R} - \left\{\frac{a}{c}\right\}$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$R_y = \mathbb{R} - \left\{\frac{4}{4}\right\} = \mathbb{R} - \{1\}$$

(تابع) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۹ و ۵۰)

۶- گزینه «۲»

(موردی براتی)

در ضابطه $f(x)$ ابتدا عبارت زیر رادیکال را مربع کامل می‌کنیم و سپس به ترتیب تبدیل‌ها را انجام می‌دهیم.

$$f(x) = \sqrt{-(x+3)^2 + 4} \xrightarrow[\substack{\text{انقباض افقی با ضریب } 2 \\ x \rightarrow \frac{x}{2}}]{\substack{\text{انقباض عمودی با ضریب } 2 \\ y \rightarrow 2y}} y = \sqrt{-\left(\frac{x}{2} + 3\right)^2 + 4}$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{قرینه نسبت به محور } y \\ x \rightarrow -x}]{\substack{\text{تغییر عمودی واحد به چپ} \\ y \rightarrow y+4}} y = \sqrt{-\left(\frac{-x}{2} + 3\right)^2 + 4}$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{انقباض عمودی با ضریب } 2 \\ y \rightarrow 2y}]{\substack{\text{انقباض افقی با ضریب } 2 \\ x \rightarrow \frac{x}{2}}} y = \sqrt{-\left(\frac{-(x+5)}{2} + 3\right)^2 + 4}$$

در ادامه برای یافتن طول نقطه برخورد نمودارهای $f(x)$ و $g(x)$ معادله $f(x) = g(x)$ را حل می‌کنیم:

$$\sqrt{-x^2 - 6x - 5} = 2\sqrt{-\left(\frac{-x}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 + 4}$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{بمقدار } 2 \\ \text{ضرب کردن}}]{\substack{\text{مربع کردن} \\ \text{هر دو طرف} \\ \text{بمقدار } 2 \\ \text{ضرب کردن}}} -x^2 - 6x - 5 = 4\left(-\frac{x}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} + 4\right)$$

$$\Rightarrow -x^2 - 6x - 5 = -x^2 + 2x - 1 + 16$$

$$\Rightarrow -8x = 20 \Rightarrow x = -\frac{20}{8} = -\frac{5}{2}$$

(تابع) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۱۳ و ۱۱۵) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۷- گزینه «۳»

(موردی براتی)

می‌دانیم که جواب‌های معادله $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = k$ ، طول نقاط برخورد نمودارهای

$y = k$ و $y = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ است. ابتدا دامنه تابع $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ را پیدا می‌کنیم.

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$$

$$f(x) = \frac{9-x^2}{x^2+2x} \Rightarrow x^2+2x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0, -2\}$$

$$g(x) = \frac{x^2-x-12}{x^3-2x^2-8x} \Rightarrow x(x+2)(x-4)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{0, -2, 4\} \\ x=4 \end{cases}$$

$$g(x)=0 \Rightarrow \frac{x^2-x-12}{x^3-2x^2-8x}=0 \Rightarrow (x-4)(x+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=-3 \end{cases}$$

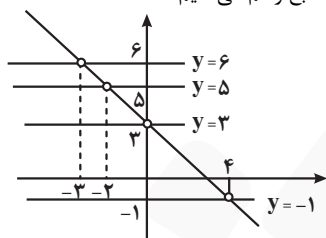
$$\Rightarrow D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{0, -2, -3, 4\}$$

سپس ضابطه $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{9-x^2}{x^2+2x} \div \frac{x^2-x-12}{x^3-2x^2-8x}$$

$$= \frac{(3-x)(3+x)}{x(x+2)} \times \frac{x(x-4)(x+2)}{(x-4)(x+3)} = 3-x$$

نمودار $y = 3-x$ را با در نظر گرفتن دامنه تابع رسم می‌کنیم.



با توجه به شکل واضح است که معادله $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = k$ به ازای $k = -1$ و $k = 3$ و

(تابع) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۸ تا ۵۰ و ۶۵ تا ۶۹)

$k = 5$ و $k = 6$ جواب ندارد.

۸- گزینه «۲»

(سپهر متولی)

$$\begin{cases} f \circ f^{-1}(a) = a, & a \in D_{f^{-1}} \\ f^{-1} \circ f(a) = a, & a \in D_f \end{cases}$$

از روی ضابطه $f(x)$ ، می‌دانیم $D_f = (-\infty, 2]$ و $R_f = [-1, +\infty)$ و همچنین $D_{f^{-1}} = R_f$.

$$f \circ f^{-1}(2x), \quad 2x \in D_{f^{-1}} \Rightarrow 2x \in [-1, +\infty), \quad 2x \geq -1$$

$$\Rightarrow x \geq -\frac{1}{2} : x \in [-\frac{1}{2}, +\infty)$$

$$f^{-1} \circ f(x) = x, \quad x \in D_f \Rightarrow x \in (-\infty, 2]$$

پس ضابطه تابع خواسته شده به صورت زیر است.

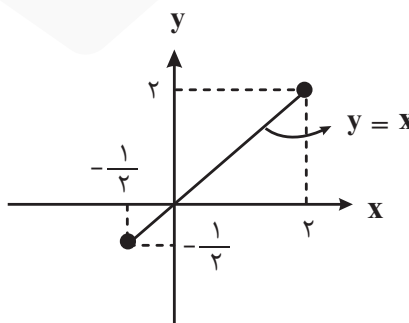
$$y = f \circ f^{-1}(2x) - f^{-1} \circ f(x) = 2x - x = x \Rightarrow y = x$$

و دامنه تابع بدست آمده، اشتراک بازه‌های $[-\frac{1}{2}, +\infty)$ و $(-\infty, 2]$

است که برابر است با:

$[-\frac{1}{2}, 2]$. پس نمودار تابع خواسته شده، نمودار تابع $y = x$ در بازه

$[-\frac{1}{2}, 2]$ است؛ یعنی:



(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۹- گزینه «۱»

(یوسف عراز)

✓ ابتدا نظیر نقطه A را روی نمودار

$$f(x) \text{ می‌یابیم و آن را } C \text{ می‌نامیم.}$$

$$\underbrace{2f(x-2)+1}_{+2} \rightarrow f(x)$$

$$+(-1) \rightarrow +3$$

$$C(1-2, \frac{3-1}{2}) = (-1, \frac{2}{2})$$

✓ سپس نظیر C را روی نمودار $f^{-1}(x)$ می‌یابیم و آن را D

$$\text{می‌نامیم: } D(\frac{2}{2}, -1)$$

$$f(x) = f^{-1}(x)$$

✓ در نهایت نظیر نقطه D را روی نمودار تابع $-f^{-1}(2x+1)-3$

می‌یابیم.

$$\underbrace{f^{-1}(x)}_{+1 \rightarrow x2} \rightarrow -f^{-1}(2x+1)-3$$

$$x(-1) \rightarrow -3$$

$$B(\frac{2}{2}-1, -(-1)-3) = (-\frac{1}{2}, -2)$$

✓ حال وسط پاره خط AB را به دست می‌آوریم.

$$A(1, 2)$$

$$B(-\frac{1}{2}, -2) \Rightarrow (\frac{1+(-\frac{1}{2})}{2}, \frac{2+(-2)}{2}) = (\frac{5}{4}, \frac{1}{2})$$

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱ و ۲۴ تا ۲۹)

۱۰- پاسخ: گزینه ۴

(متوسط - خط به خط - استاندارد) - ریاضی ۳ صفحه ۱۴

ابتدا دامنه تعریف توابع f و g را به دست می آوریم:

$$D_f = [1, +\infty), D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{f \circ g} = \{x : x \in D_g, g(x) \in D_f\}, D_g = \mathbb{R}$$

$$g(x) \in D_f \Rightarrow 2x^2 - 1 \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \end{cases} \Rightarrow D_{f \circ g} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

$$D_{g \circ f} = \{x : x \in D_f, f(x) \in D_g\}$$

$$x \in D_f \Rightarrow x \geq 1$$

$$f(x) \in D_g \Rightarrow \sqrt{x-1} \in \mathbb{R} \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow D_{g \circ f} = [1, +\infty)$$

$$D_{f \circ g} \cap D_{g \circ f} = [1, +\infty)$$

۱۱- پاسخ: گزینه ۱

(متوسط - ترکیبی - سریع) - ریاضی ۳ صفحه ۷

تابعی که هم صعودی و هم نزولی باشد، تابع ثابت است و برد تابع ثابت تک عضوی است. به همین سبب داریم:

$$f(x) = 2ax^2 + 2bx - a^2x - ab - 4x^2 - 8x$$

$$f(x) = (2a - 4)x^2 + (2b - a^2 - 8)x - ab$$

برای آن که f تابع ثابتی باشد، باید:

$$\begin{cases} 2a - 4 = 0 \Rightarrow a = 2 \\ 2b - a^2 - 8 = 0 \Rightarrow 2b - 12 = 0 \Rightarrow b = 6 \end{cases}$$

$$f(x) = -12$$

پس f تابعی ثابت با ضابطه $f(x) = -12$ است، لذا:

$$f(\text{هر چیزی}) = -12 \Rightarrow f(a - 2b) = -12$$

۱۲- پاسخ: گزینه ۴

(متوسط - خط به خط - استاندارد) - ریاضی ۱ صفحه ۹۵ تا ۱۰۰

وقتی قرار باشد ضابطه تابع باشد مقدار $f(2)$ از هر ۲ ضابطه با هم برابر باشند، پس:

$$f(2) = \sqrt{8+1} - 3a = 3 - 3a$$

$$f(2) = f(0) + 12 - a$$

اما $f(0) = 1 - 3a$ ، پس:

$$3 - 3a = 1 - 3a + 12 - a \Rightarrow 3 = 13 - a \Rightarrow a = 10 \Rightarrow f(0) = -29$$

$$f(3) = f(0) + 27 - a = -29 + 27 - 10 = -12$$

۱۳- پاسخ: گزینه ۲

(سخت - ترکیبی - استاندارد ۵) - ریاضی ۱ صفحه ۹۶ تا ۹۸

می‌دانیم مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب به شرطی تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایز، مولفه اول برابر نداشته باشند. پس یک مجموعه شامل زوج‌های مرتب در حالتی تابع نیست که دو زوج مرتب با مولفه اول برابر پیدا کنیم اما مولفه دوم برابر نداشته باشند. پس:

$$2a = -5 \Rightarrow a = -\frac{5}{2} \Rightarrow (-5, -5) \in f, (-5, 6) \in f \quad \text{در این حالت تابع نیست.}$$

$$a^2 - 2a = 3 \Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 3 \end{cases}$$

در این حالت تابع نیست. $a = -1: (+3, 1) \in f, (3, 6) \in f$

در این حالت تابع نیست. $a = 3: (3, 1) \in f, (3, 6) \in f$

$$a^2 - 2a = 2a \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \Rightarrow (0, 1) \in f, (0, 6) \in f \\ a = 4 \Rightarrow (4, 1) \in f, (4, 6) \in f \end{cases}$$

$$a^2 - 2a = -5 \Rightarrow a^2 - 2a + 5 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \quad \text{a یافت نمی‌شود.}$$

پس $a = -\frac{5}{2}, a = 3, a = -1, a = 4, a = 0$ قابل قبولند.

۱۴- پاسخ: گزینه ۴

(متوسط - خط به خط - سریع ۵) - ریاضی ۲ صفحه ۵۲ تا ۵۳

با توجه به نمودار داده شده برای تابع f ، می‌توانیم تابع $y = f(x)$ را مطابق جدول مقابل تعیین علامت کنیم.

x	-4	-2	2
f(x)	+	-	+
2-x	+	+	-
	+	-	+

پس تابع فقط در بازه $(-4, -2)$ تعریف نشده است، پس:

$$D_f = \mathbb{R} - (-4, -2)$$

۱۵- پاسخ: گزینه ۴

(متوسط - محاسباتی - استاندارد ۱ - ریاضی ۳ صفحه ۲۷ - ۱۲۰۱)

ابتدا تابع را به صورت یک تابع چندضابطه‌ای تبدیل می‌کنیم:

$$f(x) = |1 - 2x| - 3|x - 2| = \begin{cases} 1 - 2x + 3x - 6 & x \leq \frac{1}{2} \\ 2x - 1 + 3x - 6 & \frac{1}{2} \leq x \leq 2 \\ 2x - 1 - 3x + 6 & x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x - 5 & x \leq \frac{1}{2} \\ 5x - 7 & \frac{1}{2} \leq x \leq 2 \\ -x + 5 & x \geq 2 \end{cases}$$

تابع $f(x) = 5 - x$ بخشی از نمودار است که با دامنه $x \geq 2$ ، f نزولی اکید شده است:

$$f(x) = 5 - x \Rightarrow \begin{cases} \text{دامنه: } x \geq 2 \\ \text{بردار: } y \leq 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = 5 - x \Rightarrow \begin{cases} \text{دامنه: } x \leq 3 \\ \text{بردار: } y \geq 2 \end{cases}$$

۱۶- پاسخ: گزینه ۳

(متوسط - مفهومی - استاندارد ۱ - ریاضی ۳ صفحه ۱۴ / ریاضی ۲ صفحه ۵۰ - ۱۲۰۱ و ۱۱۰۳)

روش اول

ابتدا ضابطه توابع f و g را به دست می‌آوریم:

$$f(x - 2) = \sqrt{ax + b} \xrightarrow[\text{(۲ واحد به چپ)}]{x \rightarrow x+2} f(x) = \sqrt{a(x+2) + b} \Rightarrow f(x) = \sqrt{ax + 2a + b}$$

$$g(3 - x) = \sqrt{1 + 4x} \xrightarrow[\text{(x به -x)}]{\text{قرینه نسبت به y}} g(3 + x) = \sqrt{1 - 4x}$$

$$\xrightarrow[\text{۳ واحد به راست}]{x \rightarrow x-3} g(x) = \sqrt{1 - 4(x-3)} \Rightarrow g(x) = \sqrt{-4x + 13}$$

در نتیجه اگر قرار باشد دو تابع با هم برابر باشند، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a = -4 \\ 2a + b = 13 \end{cases} \Rightarrow b = 21 \Rightarrow b - a = 21 - (-4) = 25$$

روش دوم

اگر $x = 6$ را در $g(x)$ قرار دهیم، حاصل به صورت زیر در می‌آید:

$$g(3 - x) = \sqrt{1 + 4x} \xrightarrow{x=6} g(-3) = \sqrt{1 + 4 \times 6} = \sqrt{25}$$

می‌دانیم که $g(x) = f(x)$ است؛ پس $g(-3) = f(-3)$. در نتیجه به ازای $x = -1$ به عبارت زیر می‌رسیم:

$$f(-1 - 2) = \sqrt{a(-1) + b} \Rightarrow f(-3) = \sqrt{b - a} \xrightarrow{f(-3)=g(-3)=\sqrt{25}} b - a = 25$$

۱۷- پاسخ: گزینه ۳

(آسان - محاسباتی - سریع) - ریاضی ۳ صفحه ۱۳ و ۱۴ - ۱۴۰۱

چون f تابع خطی است، پس $f(x) = ax + b$ بوده و در نتیجه: $f(2x) = 2ax + b$
با توجه به دامنه داده شده باید $a > 0$ باشد.
با توجه به دامنه تابع رادیکالی با فرجه زوج، خواهیم داشت:

$$f(2x) \geq 0 \Rightarrow 2ax + b \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{-b}{2a} \Rightarrow x \in \left[\frac{-b}{2a}, +\infty\right)$$

$$\Rightarrow \frac{-b}{2a} = -3 \Rightarrow b = 6a \Rightarrow f(x) = ax + 6a \Rightarrow f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{ax}{2} + 6a$$

$$\frac{ax}{2} + 6a \geq 0 \Rightarrow a\left(\frac{x}{2} + 6\right) \geq 0 \xrightarrow{a>0} \frac{x}{2} + 6 \geq 0 \Rightarrow x \geq -12 \Rightarrow D_{f\left(\frac{x}{2}\right)} = [-12, +\infty)$$

حال باید داشته باشیم:

جرقه ذهنی ...

با توجه به این که طول نقاط تابع $f\left(\frac{x}{2}\right)$ نسبت به تابع $f(2x)$ ، ۴ برابر شده است پس دامنه آن نیز $[-12, +\infty)$ یعنی $[-12, +\infty)$ خواهد بود.

این فقط به جرقه ذهنی نیست یه راه حل ویژه ست. 😊

۱۸- پاسخ: گزینه ۳

(آسان - مفهومی - سریع) - ریاضی ۳ صفحه ۱۴ - ۱۴۰۱

f همانی است پس $f(x) = x$ است. از طرفی چون g تابع ثابت است، پس $g(x) = k$. در نتیجه:

$$\begin{cases} f(1-2x) = 1-2x \\ g(3x) = k \end{cases} \Rightarrow 4(1-2x) - 2k = -8x - 4$$

$$\Rightarrow 4 - 8x - 2k = -8x - 4 \Rightarrow 2k = 8 \Rightarrow k = 4 \Rightarrow g(x) = 4$$

$$\Rightarrow \frac{g(3)}{f(-2)} = \frac{4}{-2} = -2$$

۱۹- پاسخ: گزینه ۴

(سخت - محاسباتی - زمان بر) - ریاضی ۱ صفحه ۱۰۱ - ۱۰۰۵

چون $D_f = [-2, 3]$ است، پس $x = -2$ و $x = 3$ ریشه های عبارت زیر رادیکال هستند، به همین جهت:

$$ax^2 + bx + 6 = 0 \Rightarrow x = -2, 3$$

$$\frac{c}{a} = \frac{6}{a} = -6 \Rightarrow a = -1 \text{ ضرب ریشه ها:}$$

$$-\frac{b}{a} = 1 \Rightarrow \frac{-b}{-1} = 1 \Rightarrow b = 1 \text{ جمع ریشه ها:}$$

$$\Rightarrow f(x) = 1 - \sqrt{-(x+2)(x-3)} = 1 - \sqrt{-x^2 + x + 6}$$

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 6 = \frac{25}{4}$$

طول رأس سهمی $y = -x^2 + x + 6$ برابر $x = \frac{1}{2}$ است، پس:

توجه کنید که $\frac{1}{2} \in [-2, 3]$ می باشد.

$$0 \leq \sqrt{-x^2 + x + 6} \leq \frac{5}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq f(x) \leq 1$$

حال داریم:

$$\Rightarrow R_f = \left[-\frac{3}{2}, 1\right]$$

۲۰- پاسخ: گزینه ۲

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) ریاضی ۳ صفحه ۱۶ تا ۱۹ - ۱۴۰۱

تابع $f(x)$ از نقطه $A(0, 16)$ عبور کرده است، پس:

$$f(0) = 16 \Rightarrow 4a + a^3 = 16 \Rightarrow a^3 + 4a - 16 = 0 \Rightarrow (a - 2)(a^2 + 2a + 8) = 0 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow f(x) = 8 - (x - 2)^3$$

$$\Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow (x - 2)^3 = 8 \Rightarrow x - 2 = 2 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow b = 4$$

$$a = 2 \Rightarrow b - a = 4 - 2 = 2$$

$$b = 4$$

۲۱- پاسخ: گزینه ۳

(متوسط - مفهومی - استاندارد) ریاضی ۲ صفحه ۶۱ و ریاضی ۳ صفحه ۸ - ۱۴۰۱

بررسی سریع:

$$a = 0 \Rightarrow f(x) = (2n - 3)x + n \text{ تابع درجه دوم روی } \mathbb{R} \text{ یکنوا نیست}$$

$$f(x) \text{ اکیداً نزولی} \Rightarrow 2n - 3 < 0 \xrightarrow{n \text{ طبیعی است}} n = 1 \Rightarrow f(x) = -x + 1$$

$$f^{-1}(x) = -x + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = f(x)$$

تابع درجه دوم نمی‌تواند روی $\mathbb{R}$ یکنوا باشد، پس باید $a = 0$ باشد، در نتیجه:

$$f(x) = (2n - 3)x + n$$

تابع f به شرطی اکیداً نزولی است که $2n - 3 < 0$ باشد، چون n طبیعی است، پس $n = 1$ است و داریم:

$$f(x) = -x + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = -x + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = f(x)$$

۲۲- پاسخ: گزینه ۱

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) ریاضی ۱ صفحه ۱۱۲ و ریاضی ۳ صفحه ۲۴ - ۱۴۰۱

بررسی سریع:

در ضابطه دوم تابع f ، $y < 3$ است، پس:

$$f^{-1}(2) = k \Rightarrow f(k) = 2 \Rightarrow 1 + k = 2 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow f^{-1}(2) = 1 \Rightarrow g(a) = 1$$

$$g(a) = 1 \Rightarrow \begin{cases} a - 2 = 1; f(a) \geq 0 \\ 2 - a = 1; f(a) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3; f(3) \geq 0 \checkmark \\ a = 1; f(1) < 0 \times \end{cases} \text{ a یک جواب دارد.}$$

در تابع f ، در ضابطه اول، $y \geq 3$ و در ضابطه دوم $y < 3$ است، پس برای محاسبه $f^{-1}(2)$ از ضابطه دوم استفاده می‌کنیم:

$$f^{-1}(2) = k \Rightarrow f(k) = 2 \Rightarrow 1 + k = 2 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow f^{-1}(2) = 1$$

حال داریم:

$$g(a) = 1 \Rightarrow \begin{cases} a - 2 = 1; f(a) \geq 0 \\ 2 - a = 1; f(a) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3; f(3) \geq 0 \checkmark \\ a = 1; f(1) < 0 \times \end{cases} \text{ قابل قبول} \quad \text{غیرقابل قبول}$$

پس برای a ، تنها یک جواب وجود دارد.

پاسخ: گزینه ۱



اول با استفاده از نقطه‌های روی نمودار، ضابطه تابع $f(x)$ رو کامل پیدا کن. بعدش این ضابطه رو بذار توی تابع $g(x)$ و تا جایی که می‌شه ساده‌اش کن.

۲۳- پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** ابتدا به کمک نقاط روی نمودار ضابطه تابع f را مشخص می‌کنیم:

$$(0, -2) \in f \Rightarrow -2 = b$$

$$(1, 0) \in f \Rightarrow 0 = a + b \Rightarrow a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow f(x) = 2x^2 - 2$$

گام دوم: حال ضابطه تابع g را مشخص می‌کنیم:

$$g(x) = \frac{f(x)}{bx + a} \Rightarrow g(x) = \frac{2x^2 - 2}{-2x + 2} \Rightarrow g(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{-2(x - 1)}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{2(x-1)(x^2 + x + 1)}{-2(x-1)} = -(x^2 + x + 1) ; x \neq 1$$

گام سوم: پس تابع g یک تابع درجه دوم با دامنه $\mathbb{R} - \{1\}$ است و می‌دانیم که توابع درجه دوم روی بازه‌ای از دامنه‌شان که طول رأس سهمی جزء نقاط درونی آن بازه است، یکنوا نیستند.

حالا با توجه به فرض بسیار مهم سؤال که $0 < \alpha < \beta$ است، نتیجه می‌گیریم که کمترین مقدار α برابر همین طول رأس سهمی است:

$$g(x) = -x^2 - x - 1 ; x \neq 1 \xrightarrow{x_s = -\frac{b}{2a}} x_s = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha \geq -\frac{1}{2}$$

از طرفی $x = 1$ جزء دامنه تابع g نیست، پس بیشترین مقدار β نیز برابر ۱ است:

$$\beta \leq 1$$

از توضیحات بالا نتیجه می‌گیریم که بزرگ‌ترین بازه به فرم مفروض سؤال که روی آن تابع g یکنوا باشد، بازه $(-\frac{1}{2}, 1)$ است، پس بیشترین مقدار $\beta - \alpha$ برابر $\frac{3}{2}$ است.

پاسخ: گزینه ۲

۲۴- درس Box

تأثیر توابع یکنوا بر نامعادلات

قانون کلی اعمال تابع بر نامعادله

هنگامی که طرفین یک نامعادله را به عنوان ورودی به یک تابع می‌دهیم، جهت نامعادله ممکن است ثابت بماند یا برعکس شود. این موضوع به صعودی یا نزولی بودن تابع بستگی دارد:

● اگر تابع f اکیداً صعودی باشد، جهت نامعادله حفظ می‌شود:

$$a < b \Leftrightarrow f(a) < f(b)$$

● اگر تابع f اکیداً نزولی باشد، جهت نامعادله برعکس می‌شود:

$$a < b \Leftrightarrow f(a) > f(b)$$

کاربرد در توابع معروف

نوع تابع	بازه یکنوایی	تأثیر بر نامعادله
توان فرد $f(x) = x^{2n+1}$	$\mathbb{R}$	اکیداً صعودی $\leftarrow$ جهت حفظ می‌شود.
توان زوج $f(x) = x^{2n}$	$[0, +\infty)$	اکیداً صعودی $\leftarrow$ جهت حفظ می‌شود (برای اعداد نامنفی)
توان زوج $f(x) = x^{2n}$	$(-\infty, 0]$	اکیداً نزولی $\leftarrow$ جهت برعکس می‌شود (برای اعداد نامثبت)
نمایی $f(x) = a^x$	$\mathbb{R}$	اگر $a > 1$ صعودی (حفظ جهت) و اگر $0 < a < 1$ نزولی (برعکس شدن جهت) است.
لگاریتمی $f(x) = \log_a x$	$(0, +\infty)$	اگر $a > 1$ صعودی (حفظ جهت) و اگر $0 < a < 1$ نزولی (برعکس شدن جهت) است.

خیلی تشریحی ✓

گام اول: ابتدا دامنه تابع $y = f(x)$ و وضعیت یکنوایی و محل برخورد آن با محور x را مشخص می‌کنیم:

$$-4 \leq x \leq 5 \Rightarrow -5 \leq -x \leq 4 \Rightarrow -3 \leq 2-x \leq 6 \Rightarrow D_f = [-3, 6]$$

$$(-1, 0) \in y = 2f(2-x) \Rightarrow 0 = 2f(3) \Rightarrow f(3) = 0$$

همچنین طبق نکات قبلی، اگر تابع $y = f(x)$ اکیداً صعودی باشد، تابع $y = f(-x)$ اکیداً نزولی است، پس:

$$y = 2f(2-x) \Rightarrow \text{اکیداً صعودی} \Rightarrow y = f(x) \Rightarrow \text{اکیداً نزولی}$$

گام دوم: حال چون تابع f اکیداً نزولی و $f(3) = 0$ در نتیجه:

$$-3 \leq x < 3 \Rightarrow f(-3) \geq f(x) > f(3) \Rightarrow f(x) > 0$$

$$3 < x \leq 6 \Rightarrow f(3) > f(x) \geq f(6) \Rightarrow f(x) < 0$$

گام سوم: حالا برای مشخص کردن دامنه تابع g ، مجموعه جواب‌های نامعادله $\frac{f(x)}{x^2-1} \geq 0$ را مشخص می‌کنیم:

x	-3	-1	1	3	6
$f(x)$	+	+	+	+	-
x^2-1	+	0	-	0	+
$g(x)$	+	تن	-	تن	-

$$\Rightarrow D_g = [-3, -1) \cup (1, 3]$$

در نتیجه دامنه تابع g شامل اعداد صحیح $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ است.

پاسخ: گزینه ۱



اول برد تابع $f(x)$ رو پیدا کن. چون gof ثابت، یعنی g به ازای تمام مقادیر برد f باید به خروجی ثابت بده، از این تساوی برای پیدا کردن a استفاده کن.

۲۵- درس Box

تعریف تابع ثابت

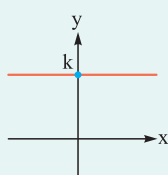
تابعی را ثابت می‌نامیم که برد آن تنها شامل یک عضو باشد. به عبارت دیگر، این تابع به ازای تمام ورودی‌های دامنه خود، همواره یک خروجی یکسان و ثابت تولید می‌کند.

ضابطه تابع: $f(x) = k$ که در آن k یک عدد حقیقی ثابت می‌باشد.

دامنه: معمولاً مجموعه اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ در نظر گرفته می‌شود.

برد: مجموعه تک‌عضوی $\{k\}$ است.

نمودار تابع ثابت: نمودار تابع ثابت، یک خط افقی موازی با محور x هاست که محور y را در نقطه k قطع می‌کند.



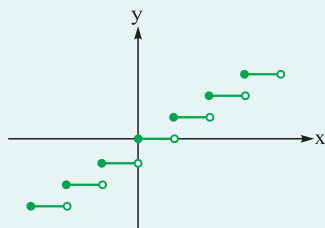
تابع جزء صحیح و نمودارهای مرتبط

تعریف تابع جزء صحیح

تابع جزء صحیح، به هر عدد حقیقی x ، بزرگ‌ترین عدد صحیحی را نسبت می‌دهد که کوچک‌تر یا مساوی x باشد. این تابع را با نماد $y = [x]$ نمایش می‌دهیم.

دامنه: مجموعه اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$

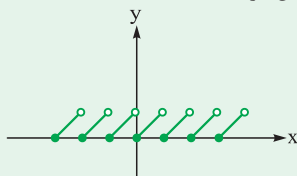
برد: مجموعه اعداد صحیح $(\mathbb{Z})$



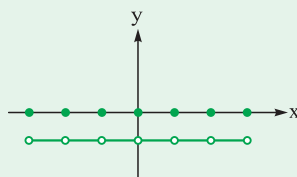
نمودار چند تابع معروف شامل جزء صحیح



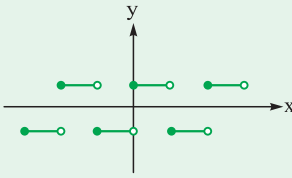
۱) تابع جزء کسری $y = x - [x]$: این تابع، بخش اعشاری اعداد را نمایش می‌دهد و برد آن بازه $[0, 1)$ است.



۲) تابع $y = [x] + [-x]$: مقدار این تابع برای اعداد صحیح صفر و برای اعداد غیر صحیح -1 است.



۳) تابع $y = (-1)^{[x]}$: این تابع به صورت متناوب بین مقادیر ۱ و -۱ در بازه‌های صحیح تغییر می‌کند.



ویژگی‌های مهم تابع جزء صحیح



تابع جزء صحیح ($y = [x]$) دارای ویژگی‌های جبری متعددی است که در حل مسائل و ساده‌سازی عبارات به کار می‌روند، مهم‌ترین این ویژگی‌ها عبارت‌اند از:

● **تعریف اصلی:** اگر n یک عدد صحیح باشد، $[x] = n$ اگر و تنها اگر $n \leq x < n+1$ باشد.

(یک نتیجه مستقیم این است که اگر x خود عددی صحیح باشد، آن‌گاه $[x] = x$ است.)

● **نامساوی‌های مهم:** برای هر عدد حقیقی x همواره دو نامساوی زیر برقرار است:

$$[x] \leq x < [x] + 1, \quad x - 1 < [x] \leq x$$

● **خاصیت جزء کسری:** اختلاف هر عدد با جزء صحیح آن ($x - [x]$) همواره در بازه $[0, 1)$ قرار دارد.

$$0 \leq x - [x] < 1$$

● **جمع با عدد صحیح:** اگر k یک عدد صحیح باشد، می‌توان آن را از داخل جزء صحیح خارج کرد:

$$[x + k] = [x] + k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

● **جزء صحیح قرینه:** رابطه جزء صحیح x و $-x$ به صورت زیر است:

$$[-x] = \begin{cases} -[x] & x \in \mathbb{Z} \\ -[x] - 1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: با توجه به نکات تابع f داریم:

$$f(x) = [x+1] + [-x-1+4] \Rightarrow f(x) = [x+1] + [-x-1] + 4 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0+4 & ; x \in \mathbb{Z} \\ -1+4 & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 4 & x \in \mathbb{Z} \\ 3 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

گام دوم: حال چون تابع gof ثابت است، برای $x_1 \in \mathbb{Z}$ و $x_2 \notin \mathbb{Z}$ داریم:

$$(\text{gof})(x_1) = (\text{gof})(x_2) \Rightarrow g(4) = g(3) \Rightarrow 16 + 4a - a = 9 + 3a - a \Rightarrow a = -7$$

گام سوم: ضابطه تابع g را بازنویسی کرده و کم‌ترین مقدار آن را به دست می‌آوریم:

$$g(x) = x^2 - 7x + 7 \Rightarrow \xrightarrow{x_s = \frac{7}{2}} \Rightarrow y_s = g\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{49}{4} - \frac{49}{2} + 7 = -\frac{5}{4}$$

پاسخ: گزینه ۲



اول تابع $g(x)$ رو به صورت دوضابطه‌ای بنویس. بعد ضابطه $f \circ g(x)$ رو برای $x \geq 0$ و $x < 0$ تشکیل بده. برای این که این تابع خطی باشه، شیبش توی این دو حالت باید یکی باشه.

۲۶- پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ابتدا ضابطه توابع f و g را با توجه به تعریف قدرمطلق به صورت قطعه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} 4x & ; x \geq 0 \\ 2x & ; x < 0 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} (a-2)x & ; x \geq 0 \\ (a+2)x & ; x < 0 \end{cases}$$

گام دوم: برای محاسبه ضابطه تابع $f \circ g$ باید خروجی تابع g را به عنوان ورودی تابع f در نظر بگیریم، این کار را دوباره انجام می‌دهیم. الف) برای $x \geq 0$: در این حالت $g(x) = (a-2)x$ است. برای استفاده از ضابطه مناسب تابع $f(x)$ ، باید علامت $g(x)$ را تعیین کنیم که به مقدار a بستگی دارد.

• اگر $a \geq 2 \Rightarrow a-2 \geq 0$ ، آن‌گاه $g(x) \geq 0$ و از ضابطه اول $f(x)$ استفاده می‌کنیم:

$$f(g(x)) = 4(g(x)) = 4(a-2)x$$

• اگر $a < 2 \Rightarrow a-2 < 0$ ، آن‌گاه $g(x) < 0$ و از ضابطه دوم $f(x)$ استفاده می‌کنیم:

$$f(g(x)) = 2(g(x)) = 2(a-2)x$$

ب) برای $x < 0$: در این حالت $g(x) = (a+2)x$ است.

• اگر $a > -2 \Rightarrow a+2 > 0$ ، چون x منفی است، $g(x) < 0$ و از ضابطه دوم $f(x)$ استفاده می‌کنیم:

$$f(g(x)) = 2(g(x)) = 2(a+2)x$$

• اگر $a \leq -2 \Rightarrow a+2 \leq 0$ ، چون x منفی است، $g(x) \geq 0$ و از ضابطه اول $f(x)$ استفاده می‌کنیم:

$$f(g(x)) = 4(g(x)) = 4(a+2)x$$

گام سوم: تابع زمانی خطی است که شیب آن برای $x \geq 0$ و $x < 0$ یکسان باشد. سه حالت را برای a بررسی می‌کنیم.

حالت اول: $a \geq 2$ در این حالت، شیب برای $x \geq 0$ برابر $4(a-2)$ و برای $x < 0$ برابر $2(a+2)$ است:

$$4(a-2) = 2(a+2) \Rightarrow 4a - 8 = 2a + 4 \Rightarrow 2a = 12 \Rightarrow a = 6$$

مقدار $a = 6$ در شرط این حالت ($a \geq 2$) صدق می‌کند، پس قابل قبول است.

حالت دوم: $-2 < a < 2$ در این حالت، شیب برای $x \geq 0$ برابر $2(a-2)$ و برای $x < 0$ برابر $2(a+2)$ است:

$$2(a-2) = 2(a+2) \Rightarrow a-2 = a+2 \Rightarrow -2 = 2$$

این تساوی یک تناقض است؛ بنابراین در این بازه هیچ مقداری برای a وجود ندارد.

حالت سوم: $a \leq -2$ در این حالت، شیب برای $x \geq 0$ برابر $4(a+2)$ و برای $x < 0$ برابر $2(a+2)$ است.

$$2(a-2) = 4(a+2) \Rightarrow 2a - 4 = 4a + 8 \Rightarrow -12 = 2a \Rightarrow a = -6$$

مقدار $a = -6$ در شرط این حالت ($a \leq -2$) صدق می‌کند، پس قابل قبول است.

گام چهارم: با توجه به گزینه‌ها، به ازای $a = 6$ تابع $f \circ g$ خطی است.

پاسخ: گزینه ۴



در نمایش زوج مرتبی تابع، مجموعه مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب را دامنه و مجموعه مؤلفه‌های دوم را برد می‌نامیم.

گام اول: طبق نکته ساده بالا، دامنه و برد تابع f را می‌نویسیم:

$$D_f = \{a - b, b + c - 6\}, \quad R_f = \{2b + c, a + b + 3\}$$

و طبق فرض سؤال، مجموع اعضای این دو مجموعه را برابر قرار می‌دهیم:

$$a - b + b + c - 6 = 2b + c + a + b + 3$$

$$\Rightarrow a + c - 6 = a + 2b + c + 3 \Rightarrow 2b + 3 = -6 \Rightarrow b = -3$$

پس تابع f به صورت زیر است:

$$f = \{(a + 3, c - 6), (c - 9, a)\}$$

گام دوم: حالا طبق تعبیر نوشته‌شده، برای این که تابع f دو عضو متمایز داشته باشد، لازم است مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب، نابرابر باشند:

$$a + 3 \neq c - 9 \Rightarrow a + 12 \neq c$$

که چون طبق گام اول $b = -3$ به دست آمد، می‌توانیم به جای ۱۲ عبارت $-4b$ را قرار دهیم:

$$\Rightarrow a - 4b \neq c$$

پاسخ: گزینه ۴



تابع کسری به صورت $\frac{\text{چندجمله‌ای}}{\text{چندجمله‌ای}}$ را تابع گویا می‌نامیم. دامنه این تابع $\mathbb{R} - \{\text{ریشه‌های مخرج}\}$ است.

گام اول: طبق درس باکس ساده بالا، $x = 2$ باید ریشه مخرج ضابطه تابع گویای f باشد:

$$x + a = 0 \xrightarrow{x=2} 2 + a = 0 \Rightarrow a = -2$$

گام دوم: با این مقدار a ، ضابطه تابع را بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{-2x|x|(x-2)}{x-2} \Rightarrow f(x) = -2x|x|; \quad x \neq 2$$

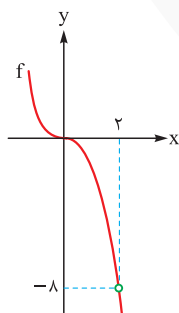
گام سوم: مقدار عبارت $-2x|x|$ را به ازای $x = 2$ حساب می‌کنیم:

$$-2x|x| \Big|_{x=2} = -8$$

و این همان عددی است که در برد تابع f حضور ندارد؛ زیرا $x = 2$ در دامنه آن قرار ندارد:

$$R_f = \mathbb{R} - \{-8\}$$

برای درک بهتر نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:



۲۸- پاسخ خیلی تشریحی ✓

پاسخ: گزینه ۳

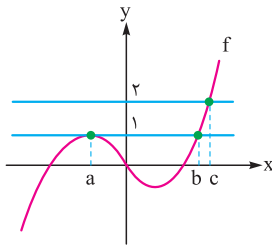
۲۹- پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا مخرج تابع g را تجزیه می‌کنیم:

$$f^2(x) - 3f(x) + 2 = (f(x) - 1)(f(x) - 2)$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{2^x}{(f(x) - 1)(f(x) - 2)}$$

طبق این نکته که دامنه تابع $y = 2^x$ همواره $\mathbb{R}$ است، دامنه تابع g فقط صف‌های توابع $f - 1$ و $f - 2$ را شامل نمی‌شود.

گام دوم: برای این که تعداد این صف‌ها را پیدا کنیم، خط‌های $y = 1$ و $y = 2$ را در کنار نمودار تابع f رسم می‌کنیم:



مطابق شکل بالا، مخرج ضابطه تابع g به ازای $x = a$ ، $x = b$ و $x = c$ صفر می‌شود؛ بنابراین این سه مقدار در دامنه تابع g قرار ندارند.

پاسخ: گزینه ۴

۳۰- پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: دامنه تابع f از اشتراک مجموعه جواب‌های دو نامعادله زیر به دست می‌آید:

$$x - a \geq 0$$

$$(b - 4)x^2 + (3 - b)x + 5 > 0$$

یعنی ریشه عبارت صورت، قابل قبول، اما ریشه عبارت مخرج، غیر قابل قبول است. توجه به همین نکته و این که بازه دامنه نیم‌بسته است، ما را به این نتیجه می‌رساند که $x = 2$ ریشه صورت و $x = 5$ ریشه مخرج است.

گام دوم: پس $x = 2$ را در صورت و $x = 5$ را در مخرج جای‌گذاری می‌کنیم و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$x - a = 0 \xrightarrow{x=2} 2 - a = 0 \Rightarrow a = 2$$

$$(b - 4)x^2 + (3 - b)x + 5 = 0 \xrightarrow{x=5} 25b - 100 + 15 - 5b + 5 = 0$$

$$\Rightarrow 20b - 80 = 0 \Rightarrow b = 4$$

گام سوم: حالا با جای‌گذاری $a = 2$ و $b = 4$ ضابطه تابع g را تکمیل می‌کنیم:

$$g(x) = \sqrt{3 - x}$$

و دامنه این تابع را به صورت زیر حساب می‌کنیم:

$$3 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3 : D_g = (-\infty, 3]$$

این بازه شامل ۳ عدد طبیعی است.