

۱- مجموع جواب‌های صحیح نامعادله $2 - |x - 2| < 6 - (|x - 2| + 1)^2$ کدام است؟ [قلمچی ۲ آبان ۱۴۰۴]

- (۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۸
(۴) ۱۲

۲- شخصی مسیر ۳۵ کیلومتری بین دو شهر را طی کرده و دوباره به شهر مبدأ باز می‌گردد. اگر سرعت متوسط او در مسیر رفت ۶ کیلومتر بر ساعت بیشتر از سرعت متوسط در مسیر برگشت باشد و مجموع زمان رفت و برگشت او برابر با ۴ ساعت باشد، سرعت او در مسیر برگشت چند کیلومتر بر ساعت بوده است؟ [قلمچی ۲ آبان ۱۴۰۴]

- (۱) ۱۵
(۲) ۱۸
(۳) ۲۱
(۴) ۲۴

۳- اگر معادله $\frac{x}{x^2 - 16} = \frac{k}{x^2 + 4x} - \frac{k}{x^2 - 4x}$ هیچ جوابی نداشته باشد، اختلاف مقادیر نامثبت ممکن برای k کدام است؟ [قلمچی ۲ آبان ۱۴۰۴]

- (۱) ۱
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۲

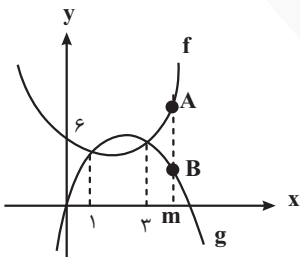
۴- مجموع جواب‌های معادله $\frac{4x}{5x^2 - 8x + 6} + \frac{3x}{5x^2 - 10x + 6} = 1$ کدام است؟ [قلمچی ۲ آبان ۱۴۰۴]

- (۱) $\frac{2}{6}$
(۲) $\frac{2}{8}$
(۳) ۳
(۴) $\frac{3}{2}$

۵- معادله درجه دومی که ریشه‌هایش از ۳ برابر ریشه‌های معادله $x^2 + 3x + 1 = 0$ یک واحد کمتر باشند، کدام است؟ [قلمچی ۲ آبان ۱۴۰۴]

- (۱) $x^2 + 11x + 19 = 0$
(۲) $x^2 - 11x + 19 = 0$
(۳) $x^2 + 11x - 19 = 0$
(۴) $x^2 - 11x - 19 = 0$

۶- در شکل زیر نمودار دو تابع درجه دوم f و g رسم شده است، به ازای کدام مقدار m طول پاره خط قائم AB برابر $\frac{2}{5}$ است؟ [قلمچی ۲ آبان ۱۴۰۴]



- (۱) $\frac{7}{2}$
(۲) $\frac{10}{3}$
(۳) $\frac{13}{4}$
(۴) $\frac{16}{5}$

۷- معادله $mx^2 = (x+1)(x+2)(x+3)(x+6)$ به ازای دو مقدار m دارای سه ریشه است. جذر حاصل ضرب این دو مقدار کدام است؟ [قلمچی ۲ آبان ۱۴۰۴]

- (۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۵
(۴) ۶

۸- جدول تعیین علامت $P(x) = (2a-6)x^2 + (2a-12)x + b$ به صورت مقابل است. مقدار $2b-2a$ چه عددی است؟ [ماز ۱۷ مهر ۱۴۰۴]

x	-3
$P(x)$	$\begin{array}{c} + \\ \circ \\ - \end{array}$

- (۱) ۹
(۲) -۱۸
(۳) -۹
(۴) -۲۷

۹- اگر معادله $\frac{x-8}{x^2+2x} - \frac{k}{x+2} = \frac{2x-1}{x}$ فقط یک ریشه داشته باشد، چند مقدار مختلف برای k به دست می آید؟ [ماز ۱۷ مهر ۱۴۰۴]

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۰- در یک مستطیل به عرض $\sqrt{5}$ ، طول ۳ برابر عرض است. مقدار k را به عرض مستطیل اضافه کرده و k واحد از طول آن کم می کنیم. مستطیل به مستطیل طلایی تبدیل می شود. حداقل مقدار k کدام است؟ [ماز ۱۷ مهر ۱۴۰۴]

- (۱) $\frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{5}+3}$ (۲) $\frac{5(\sqrt{5}-1)}{3+\sqrt{5}}$ (۳) $\frac{3(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{5}+5}$ (۴) $\frac{\sqrt{5}(\sqrt{3}-1)}{5+\sqrt{3}}$

۱۱- دو فرد A و B با هم کاری را در طی ۱۵ روز تمام می کنند. پس از ۶ روز کار مشترک، A را حذف می کنیم و B به تنهایی در ۱۵ روز تمام کار را به پایان می رساند. اگر بعد از ۶ روز کار مشترک، B را حذف می کردیم، A به تنهایی [ماز ۱۷ مهر ۱۴۰۴] مابقی کار را چند روزه تمام می کرد؟

- (۱) $32/5$ (۲) $37/5$ (۳) $22/5$ (۴) $27/5$

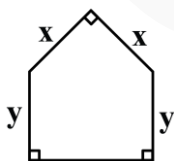
۱۲- جواب معادله $\sqrt{x} + \sqrt{x-a} = a$ یک عدد طبیعی دو رقمی است. حداقل مقدار طبیعی a چه عددی است؟ [ماز ۱۷ مهر ۱۴۰۴]

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۱۰

۱۳- α و 3β جواب های معادله $x^2 - ax - b = 0$ ، 3 و β ریشه های معادله $3x^2 + ax - 18 = 0$ می باشند. مقدار $\frac{b}{\alpha}$ کدام است؟ [ماز آبان ۱۴۰۴]

- (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۶

۱۴- پنجره ای مطابق شکل با بیشترین نوردهی می خواهیم بسازیم. اگر محیط پنجره ۱۶ باشد، مقدار x کدام است؟ [ماز آبان ۱۴۰۴]

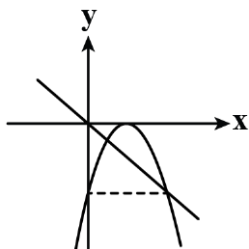


- (۱) $\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$ (۲) $\frac{8\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+1}$ (۳) $\frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+1}$ (۴) $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$

۱۵- اگر α و β صفرهای سهمی $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$ باشند، مقدار $\frac{\alpha^4 - \beta^2}{21\alpha}$ چه عددی است؟ [ماز آبان ۱۴۰۴]

- (۱) $\frac{3}{8}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{9}{8}$ (۴) $\frac{9}{4}$

۱۶- نمودار سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ و خط $y = -6x$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $\frac{b}{ac}$ چه عددی است؟ [ماز آبان ۱۴۰۴]



$$\frac{1}{8} \quad (1)$$

$$\frac{1}{6} \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \quad (3)$$

$$\frac{1}{3} \quad (4)$$

۱۷- اگر α و β جواب‌های $x^2 - 16x + 4 = 0$ باشند، مقدار عبارت $\sqrt{\frac{\alpha^2 + 4}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta^2 + 4}{\alpha}}$ چه عددی است؟ [ماز آبان ۱۴۰۴]

$$32 \quad (4)$$

$$16 \quad (3)$$

$$4 \quad (2)$$

$$4\sqrt{2} \quad (1)$$

۱۸- کدام یک از معادلات زیر دارای جواب است؟ [قلمچی ۲۰ مهر ۱۴۰۳]

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{2x+3} + 1 = 0 \quad (1)$$

$$\sqrt{2x-2} + 3 = -\sqrt{4x-3} \quad (2)$$

$$\sqrt{3x-2} + \sqrt{4x-3} = 0 \quad (3)$$

$$\sqrt{2x^2 + x - 3} + \sqrt{x^2 + 2x - 3} = 0 \quad (4)$$

۱۹- نمودار تابع $y = \frac{(|x| - 3)(x^5 + 1)(x - 5\sqrt{x} + 6)}{x^2 - 9}$ در بازه‌ای، پایین‌تر از محور طول‌ها قرار می‌گیرد. بزرگترین طول ممکن برای این بازه [قلمچی ۲۰ مهر ۱۴۰۳]

کدام است؟

$$3 \quad (1)$$

$$4 \quad (2)$$

$$5 \quad (3)$$

$$6 \quad (4)$$

۲۰- معادله $\frac{x-3}{x-1} - \frac{ax^3 + bx^2 - 4}{x^3 - 1} = \frac{x-1}{x^2 + x + 1}$ دارای بی‌شمار ریشه است. مقدار $\frac{b}{a}$ کدام است؟ [قلمچی ۲۰ مهر ۱۴۰۳]

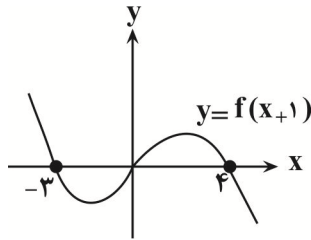
$$2 \quad (1)$$

$$-2 \quad (2)$$

$$3 \quad (3)$$

$$-3 \quad (4)$$

۲۱- نمودار تابع $y = f(x+1)$ به صورت زیر است. مجموعه جواب‌های نامعادله $\frac{4x^2 + 27x - 7}{-f(x-1)} \leq 0$ شامل چند عدد طبیعی است؟ [قلمچی ۲۰ مهر ۱۴۰۳]



- (۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۵
(۴) ۶

۲۲- میترا و سوسن قرار است یک جزوه ۶۰۰ صفحه‌ای را با یکدیگر تایپ کنند. اگر هر دو با هم شروع به تایپ کنند، کار تایپ در ۱۲ ساعت تمام می‌شود و اگر میترا به تنهایی این کار را انجام دهد، در ۲۰ ساعت آن را تمام می‌کند. اگر بعد از ۴ ساعت کار مشترک میترا کار را رها کند، سوسن مقدار کار باقیمانده را در چند ساعت انجام می‌دهد؟ [قلمچی ۲۰ مهر ۱۴۰۳]

- (۱) ۳۰ ساعت
(۲) ۲۰ ساعت
(۳) ۲۲ ساعت
(۴) ۳۲ ساعت

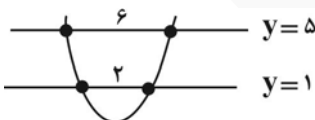
۲۳- اگر تنها ریشه معادله $x(1 + \sqrt{1-x^2}) = \sqrt{1+x^2}$ به صورت $\sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\beta}}{2}}$ باشد، حاصل $\alpha + \beta$ کدام است؟ $(\alpha, \beta \in \mathbb{Z})$ [قلمچی ۲۰ مهر ۱۴۰۳]

- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۵

۲۴- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 = 3 + (2a-1)x$ باشند و رابطه $2x_1 + x_2 - 2 = \frac{-a-1}{a}$ بین ریشه‌های معادله برقرار باشد، حاصل ضرب ریشه‌های معادله کدام است؟ [قلمچی ۴ آبان ۱۴۰۳]

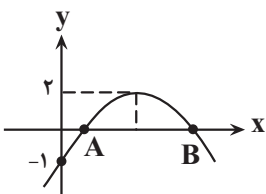
- (۱) $\frac{9}{4}$
(۲) $\frac{4}{3}$
(۳) $-\frac{4}{3}$
(۴) $-\frac{9}{4}$

۲۵- منحنی $y = ax^2 + bx + c$ روی خطوط $y = 1$ و $y = 5$ ، پاره‌خط‌هایی به طول‌های ۲ و ۶ ایجاد می‌کند. مقدار a کدام است؟ [قلمچی ۴ آبان ۱۴۰۳]



- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) $\frac{1}{3}$
(۴) $\frac{1}{2}$

۲۶- سهمی $y = f(x)$ به صورت روبه‌رو است. اگر طول پاره‌خط AB برابر ۴ و عرض رأس سهمی برابر ۲ باشد، مقدار $f(\sqrt{6})$ کدام است؟ [قلمچی ۴ آبان ۱۴۰۳]



- (۱) $\sqrt{3}$
(۲) $-\sqrt{3}$
(۳) ۲
(۴) -۲

۲۷- n عدد طبیعی و یک رقمی است به طوری که جواب معادله $\sqrt{x+2n} + \sqrt{x} = n$ عدد صحیح است. جمع مقادیر به [ماز ۱۹ مهر ۱۴۰۳]

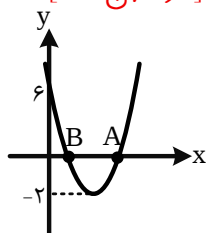
دست آمده برای n چه عددی است؟

- (۱) ۳۶ (۲) ۳۰ (۳) ۱۸ (۴) ۲۰

۲۸- جواب نامعادله $\frac{x^2 - mx + m - 1}{x - \sqrt{x^2 - ax + 2}} > 0$ بازه $(2, +\infty)$ است. مقدار $a + m$ کدام می تواند باشد؟ [ماز ۱۹ مهر ۱۴۰۳]

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۸ (۴) ۱۰

۲۹- نمودار سهمی f به صورت مقابل است. نسبت طول نقطه A به طول نقطه B کدام است؟ [ماز ۳ آبان ۱۴۰۳]



- (۱) $\frac{4}{3}$
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) $\frac{5}{2}$

۳۰- اگر a و b صفرهای سهمی $y = 2bx^2 + 5x + a$ و $a < b$ باشد، رأس سهمی در کدام ناحیه قرار دارد؟ [ماز ۳ آبان ۱۴۰۳]

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۲- گزینه «۴»

(امیررضا پویامنش)

ابتدا عبارت‌های موجود در مخرج را تجزیه می‌کنیم:

$$x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4), \quad x^2 - 4x = x(x - 4)$$

$$x^2 + 4x = x(x + 4)$$

برای حل معادله، دو طرف را در عبارت $x(x - 4)(x + 4)$ ضرب می‌کنیم:

$$x^2 = k(x - 4) - k(x + 4) \Rightarrow x^2 = -8k$$

- برای اینکه معادله جواب نداشته باشد ۲ حالت فرض می‌کنیم:

$$\Leftarrow k > 0 \quad \text{جواب نداشته باشد} \quad x^2 = -8k \quad (1) \quad \text{معادله}$$

$$\Leftarrow \text{برابر ریشه‌های مخرج باشد} \quad x^2 = -8k \quad (2) \quad \text{جواب‌های معادله}$$

$$x^2 = -8k \begin{cases} x = 4 \Rightarrow 16 = -8k \Rightarrow k = -2 \\ x = 0 \Rightarrow 0 = -8k \Rightarrow k = 0 \\ x = -4 \Rightarrow 16 = -8k \Rightarrow k = -2 \end{cases}$$

- مقادیر نامشبت $k: -2, 0$ پس اختلاف مقادیر ممکن برای $k: 2, -(-2) = 4$

(هندسه تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۹ تا ۲۱)

۴- گزینه «۴»

(علی اصغر شریفی)

ابتدا صورت و مخرج کسرها را بر x تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{4}{5x-8+\frac{6}{x}} + \frac{3}{5x-10+\frac{6}{x}} = 1$$

با تغییر متغیر $t = 5x + \frac{6}{x}$ داریم:

$$\frac{4}{t-8} + \frac{3}{t-10} = 1 \Rightarrow 4(t-10) + 3(t-8) = (t-8)(t-10) \Rightarrow t^2 - 25t + 144 = 0$$

معادله بالا دو جواب $t = 9$ و $t = 16$ دارد. با توجه به تعریف t داریم:

$$5x + \frac{6}{x} = 9 \Rightarrow 5x^2 - 9x + 6 = 0 \Rightarrow \Delta < 0$$

$$5x + \frac{6}{x} = 16 \Rightarrow 5x^2 - 16x + 6 = 0 \Rightarrow \Delta > 0$$

با توجه به آن که فقط معادله دوم جواب دارد، پس مجموعه ریشه‌های معادله اصلی همان مجموع ریشه‌های معادله دوم است:

$$5x^2 - 16x + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{8 + \sqrt{34}}{5}, \quad x_2 = \frac{8 - \sqrt{34}}{5} \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{16}{5} = 3 \frac{1}{5}$$

(هندسه تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۹ تا ۲۱)

۵- گزینه «۱»

(ممنون اسماعیل پور)

$$x^2 + 3x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = -\frac{b}{a} = -3 \\ P = \frac{c}{a} = 1 \end{cases}$$

$$S' = 3\alpha - 1 + 3\beta - 1 = 3S - 2 = -11$$

$$P' = (3\alpha - 1)(3\beta - 1) = 3\alpha \times 3\beta - 3\alpha - 3\beta + 1$$

$$= 9P - 3S + 1 = 9 + 9 + 1 = 19$$

$$x^2 - S'x + P' = 0 \Rightarrow x^2 + 11x + 19 = 0$$

(هندسه تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۳)

۶- گزینه «۱»

(ممدابراهیم توزنره یانی)

در توابع درجه دوم f و g ، ضرایب x^2 مخالف هم هستند (مطابق شکل)، پس
 $h = f - g$ قطعاً یک تابع درجه دوم بوده و با توجه به این که $3 = 0 = 1$
 می شود، می توانیم بنویسیم:

$$= -1 - 3$$

$$0 = 0 - 0 = 6 \Rightarrow = 2$$

$$AB = h(m) \Rightarrow \frac{\Delta}{2} = 2(m-1)(m-3) \Rightarrow 4m^2 - 16m + 7 = 0 \Rightarrow m = \frac{7}{4}$$

(معادله ها و نامعادله ها) (ریاضی ا. صفه های ۷۰ تا ۷۶)

۷- گزینه «۳»

(علی اصغر شریفی)

با توجه به آن که $(x+1)(x+6) = x^2 + 7x + 6$ و

$(x+2)(x+3) = x^2 + 5x + 6$ ، معادله به صورت زیر تبدیل می شود:

$$((x^2 + 6x + 6) + x)((x^2 + 6x + 6) - x) = mx^2$$

$$\Rightarrow (x^2 + 6x + 6)^2 - x^2 = mx^2 \Rightarrow (x^2 + 6x + 6)^2 = (m+1)x^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 6x + 6 = \pm \sqrt{m+1}x \Rightarrow x^2 + (6 \pm \sqrt{m+1})x + 6 = 0$$

پس به دو معادله درجه دوم رسیدیم. معادله $x^2 + (6 + \sqrt{m+1})x + 6 = 0$ دو
 ریشه دارد؛ چون:

$$\Delta = (6 + \sqrt{m+1})^2 - 4 \times 6 \geq 6^2 - 4 \times 6 > 0$$

با توجه به آن که معادله اولیه مجموعاً سه ریشه دارد، پس معادله

$x^2 + (6 - \sqrt{m+1})x + 6 = 0$ باید یک ریشه (مضاعف) داشته باشد:

$$\Delta = 0 : (6 - \sqrt{m+1})^2 = 4 \times 6 \Rightarrow \sqrt{m+1} - 6 = \pm 2\sqrt{6} \Rightarrow \sqrt{m+1} = 6 \pm 2\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow m+1 = 36 + 24 \pm 24\sqrt{6} \Rightarrow m = 59 \pm 24\sqrt{6}$$

بنابراین حاصل ضرب دو مقدار m برابر است با:

$$m_1 m_2 = (59 + 24\sqrt{6})(59 - 24\sqrt{6}) = 59^2 - 6 \times 24^2 = 3481 - 3456 = 25$$

(معادله ها و نامعادله ها) (ریاضی ا. صفه های ۷۰ تا ۷۶)

(متوسط - خط به خط - استاندارد) - ریاضی ۱ صفحه ۸۶

۸- پاسخ: گزینه ۴

با توجه به جدول که نمایانگر فقط یک ریشه ساده برای $P(x) = 0$ است متوجه می شویم که $P(x)$ یک چندجمله ای درجه اول است به
 طوری که ریشه آن $x = -3$ است، یعنی:

$$2a - 6 = 0 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow P(x) = (3a - 12)x + b$$

$$P(x) = (9 - 12)x + b = -3x + b$$

$$P(x) = 0 \Rightarrow x = +\frac{b}{3} \Rightarrow +\frac{b}{3} = -3 \Rightarrow b = -9$$

$$P(x) = -3x - 9$$

$$2b - 3a = -18 - 9 = -27$$

x	-3
$P(x)$	$+$ 0 $-$

پس $b = -9$ و $a = 3$ قابل قبول است.

۹- پاسخ: گزینه ۳

(سخت - محاسباتی - استاندارد) - ریاضی ۲ صفحه ۱۹ تا ۲۱

ابتدا معادله را به صورت یک معادله درجه دوم تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{x-8-kx}{(x^2+2x)} = \frac{2x-1}{x} \xrightarrow{x \neq 0} \frac{x-8-kx}{x+2} = 2x-1$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 4x - x - 2 = x - 8 - kx \Rightarrow 2x^2 + (2+k)x + 6 = 0$$

اگر معادله به دست آمده دارای ریشه مضاعف باشد حالت قابل قبولی از جواب است: (دقت کنید در این حالت ریشه مضاعف با هیچکدام از ریشه‌های مخرج برابر نیست)

$$\Delta = 0 \Rightarrow (2+k)^2 - 48 = 0 \Rightarrow 2 \text{ مقدار برای } k \text{ به دست می‌آید.}$$

حالتی دیگر می‌ماند که معادله $2x^2 + (k+2)x + 6 = 0$ دارای ریشه $x = 0$ یا $x = -2$ باشد، اگر $x = 0$ که امکان پذیر نیست اما اگر $x = -2$ ریشه آن باشد.

$$8 - 2(k+2) + 6 = 0 \Rightarrow k+2 = 7 \Rightarrow k = 5 \Rightarrow 2x^2 + 7x + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \text{ غ ق ق} \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

این مقدار k به دست آمده با مقادیر به دست آمده قبلی متمایز است، پس کلاً ۳ مقدار مختلف برای k به دست می‌آید که معادله فقط یک ریشه داشته باشد.

۱۰- پاسخ: گزینه ۲

(سخت - ترکیبی / محاسباتی - زمان‌بر) - ریاضی ۲ صفحه ۱۹ تا ۲۱

یک مستطیل به شرطی طلایی است که نسبت طول به عرض آن $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ باشد.

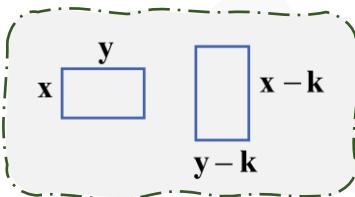
مسأله ۲ حالت دارد.

حالت اول

وقتی k به عرض اضافه کرده و k واحد از طول کم می‌کنیم همچنان اضلاع جدید همان طول و عرض بمانند که در این حالت مقدار حداقلی برای k به دست می‌آید.

حالت دوم

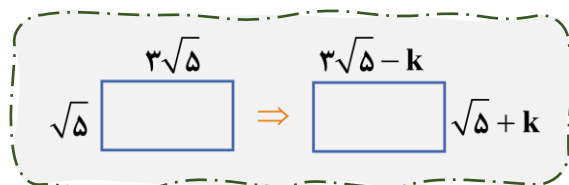
آن است که پس از تغییر آنقدر k را افزایش دهیم تا عرض مستطیل اولیه به طول مستطیل دوم تبدیل شود یعنی شکل زیر حاصل شود:



به همین جهت حداقل مقدار k را خواسته است. پس طبق حالت اول پیش می‌رویم:

$$\frac{3\sqrt{5}-k}{\sqrt{5}+k} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow 6\sqrt{5}-2k = \sqrt{5}+5+k+k\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow 5\sqrt{5}-5 = k(3+\sqrt{5}) \Rightarrow k = \frac{5(\sqrt{5}-1)}{3+\sqrt{5}}$$



۱۱- پاسخ: گزینه ۳

(سخت - مفهومی / ترکیبی - استاندارد ۱) - ریاضی ۲ صفحه ۱۹ تا ۲۲)

فرض کنیم A به تنهایی در طی a روز و B به تنهایی در طی b روز کل کار را تمام کنند، در این صورت: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{15}$
 زیرا A در هر روز $\frac{1}{a}$ از کل کار و B به تنهایی در هر روز $\frac{1}{b}$ کل کار را تمام می‌کند.

حال ادامه سوال:

$$\frac{6}{a} + \frac{6}{b} + \frac{15}{b} = 1$$

۱۵، B روز به تنهایی کار کند ۶ روز کار مشترک

$$\Rightarrow \frac{6}{15} + \frac{15}{b} = 1 \Rightarrow \frac{15}{b} = \frac{9}{15} \Rightarrow b = \frac{15 \times 15}{9} = 25$$

یعنی b به تنهایی ۲۵ روزه کار را تمام می‌کند.

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{1}{15}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{15} - \frac{1}{25} = \frac{5-3}{75} \Rightarrow a = \frac{75}{2} = 37.5$$

یعنی a به تنهایی ۳۷/۵ روزه کار را تمام می‌کند.

$$\frac{6}{a} + \frac{6}{b} + \frac{n}{a} = 1 \Rightarrow \frac{6}{15} + \frac{n}{75} = 1 \Rightarrow \frac{2n}{75} = \frac{9}{75}$$

$$n = \frac{45}{2} = 22.5$$

پس A مابقی کار را در طی ۲۲/۵ روز تمام می‌کند.

۱۲- پاسخ: گزینه ۳

(سخت - ترکیبی - زمان‌بر ۱) - ریاضی ۲ صفحه ۲۲ تا ۲۴)

اولاً باید توجه داشته باشیم معادله کلاً یک جواب دارد.

ثانیاً با تغییر a جواب معادله عوض می‌شود. پس برای حل آن داریم:

$$\sqrt{x-a} = a - \sqrt{x} \Rightarrow x - a = a^2 + x - 2a\sqrt{x}$$

$$a + a^2 = 2a\sqrt{x}$$

$$a \neq 0 \Rightarrow 1 + a = 2\sqrt{x} \Rightarrow x = \left(\frac{1+a}{2}\right)^2$$

چون a طبیعی است

با توجه به رابطه به دست آمده چون x عدد طبیعی و a هم عدد طبیعی است، پس x مربع کامل است و a عدد طبیعی فرد است.

مثلاً a = ۵، آن‌گاه x = ۹ یا a = ۷، آن‌گاه x = ۱۶.

با توجه به آن که x یک عدد ۲ رقمی است، پس حداقل مقدار a باید a = ۷ باشد.

۱۳- پاسخ: گزینه ۴

(متوسط - محاسباتی - استاندارد ۱) - ریاضی ۲ صفحه ۱۲ و ۱۳ - ۱۱۰۱)

با توجه به این که ۳ و β ریشه‌های $3x^2 + ax - 18 = 0$ هستند، پس $x = 3$ در معادله صدق می‌کند:

$$27 + 3a - 18 = 0 \Rightarrow 3a = -9 \Rightarrow a = -3$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 3x - 18 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) = 0 \Rightarrow \beta = -2 \Rightarrow 3\beta = -6$$

از طرفی α و -6 ریشه‌های $x^2 + 3x - b = 0$ هستند، یعنی $x = -6$ در معادله صدق می‌کند:

$$36 - 18 - b = 0 \Rightarrow b = 18$$

$$x^2 + 3x - 18 = 0 \Rightarrow (x+6)(x-3) = 0 \Rightarrow \alpha = 3$$

$$\begin{cases} \alpha = 3 \\ b = 18 \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{\alpha} = \frac{18}{3} = 6$$

۱۴- پاسخ: گزینه ۲

(سخت - محاسباتی - زمان‌بر ۱) - ریاضی ۲ صفحه ۱۴ - ۱۱۰۱)

با توجه به این که کف پنجره، وتر مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است، پس اندازه آن $x\sqrt{2}$ است. در نتیجه:

$$x\sqrt{2} + 2x + 2y = 16 \Rightarrow y = \frac{16 - 2x - x\sqrt{2}}{2}$$

وقتی صحبت از بیشترین نوردهی است یعنی مساحت باید بیشترین مقدار ممکن باشد:

$$S = \sqrt{2}xy + \frac{1}{2}x^2 = \sqrt{2}x\left(\frac{16 - 2x - x\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{1}{2}x^2$$

$$S(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}(16x - 2x^2 - \sqrt{2}x^2) + \frac{1}{2}x^2$$

$$\Rightarrow S(x) = \left(-\sqrt{2} - 1 + \frac{1}{2}\right)x^2 + 8\sqrt{2}x$$

با توجه به این که ضریب x^2 منفی است، پس S دارای $\max$ است در نتیجه طول رأس را می‌یابیم:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-8\sqrt{2}}{-2\sqrt{2} - 2 + 1} = \frac{8\sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2}}$$

۱۵- پاسخ: گزینه ۱

(سخت - محاسباتی - استاندارد ۱) - ریاضی ۲ صفحه ۱۳ و ۱۴ - ۱۱۰۱)

چون α و β صفرهای سهمی $f(x)$ هستند، پس ریشه‌های $-2x^2 + 3x + 2 = 0$ هستند، یعنی:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{3}{2} \\ \alpha\beta = -1 \Rightarrow \beta = \frac{-1}{\alpha} \end{cases}$$

$$\frac{\alpha^4 - \beta^4}{21\alpha} = \frac{1}{21} \left(\frac{\alpha^4 - \beta^4}{\alpha} \right) = \frac{1}{21} \left(\alpha^3 - \frac{\beta^4}{\alpha} \right) = \frac{1}{21} (\alpha^3 + \beta^3)$$

$$= \frac{1}{21} (S^3 - 3PS) = \frac{1}{21} \left(\frac{27}{8} - 3(-1)\left(\frac{3}{2}\right) \right) = \frac{1}{21} \times \frac{27 + 36}{8} = \frac{1}{21} \times \frac{63}{8} = \frac{3}{8}$$

۱۶- پاسخ: گزینه ۲

(سخت - مفهومی - زمان ۵ - ریاضی ۲ صفحه ۱۶ و ۱۷ - ۱۱۰۱)

فرض کنیم f در نقطه‌ای به طول α بر محور x مماس شده باشد، پس $f(x) = a(x - \alpha)^2$ و $a < 0$ است. با توجه به این که طول رأس سهمی، میانگین طول‌های دو نقطه هم عرض روی سهمی است، پس:

$$f(0) = f(2\alpha) = c \Rightarrow A \left| \begin{matrix} 2\alpha \\ c \end{matrix} \right. \in f$$

نقطه A روی خط $y = -6x$ قرار دارد، پس:

$$c = -12\alpha, \quad f(x) = a(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2) = ax^2 - 2a\alpha x + a\alpha^2 \xrightarrow{x=0} a\alpha^2 = -12\alpha \Rightarrow a\alpha = -12 \Rightarrow a = \frac{-12}{\alpha}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{-12}{\alpha}x^2 + 24x - 12\alpha \Rightarrow \begin{cases} ac = 144 \\ b = 24 \end{cases}$$

$$\frac{b}{ac} = \frac{24}{144} = \frac{1}{6}$$

۱۷- پاسخ: گزینه ۴

(سخت - محاسباتی - زمان ۵ - ریاضی ۲ صفحه ۱۳ - ۱۱۰۱)

α و β جواب‌های معادله هستند، پس در معادله صدق می‌کنند:

$$\alpha^2 - 16\alpha + 4 = 0 \Rightarrow \alpha^2 + 4 = 16\alpha$$

$$\beta^2 - 16\beta + 4 = 0 \Rightarrow \beta^2 + 4 = 16\beta$$

$$\alpha + \beta = 16$$

$$\alpha\beta = 4 \Rightarrow \begin{cases} \beta = \frac{4}{\alpha} \\ \alpha = \frac{4}{\beta} \end{cases}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\sqrt{\frac{\alpha^2 + 4}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta^2 + 4}{\alpha}} = \sqrt{\frac{16\alpha}{\frac{4}{\alpha}}} + \sqrt{\frac{16\beta}{\frac{4}{\beta}}} = \sqrt{4\alpha^2} + \sqrt{4\beta^2}$$

$$= |\alpha| + |\beta| = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = 2(16) = 32$$

توجه کنید که چون معادله دارای ۲ جواب مثبت است، پس $\alpha, \beta > 0$ و داریم: $|\alpha| + |\beta| = 2\alpha + 2\beta$

۱۸- گزینه «۴»

(مهمه صارق هراتی)

بررسی گزینه‌ها:

گزینه «۱»: جمع دو رادیکال که هر کدام همواره حاصلی بزرگتر یا مساوی صفر دارند، هیچ‌گاه برابر عددی منفی نخواهد شد.

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{2x+3} = -1$$

گزینه «۲»: همانند گزینه «۱» حاصل جمع دو رادیکال هیچ‌گاه منفی نخواهد شد.

$$\sqrt{3x-2} + \sqrt{4x-3} = -3$$

گزینه «۳»: حاصل جمع دو رادیکال در ریشه مشترک عبارات زیر رادیکال‌ها صفر خواهد شد که در این گزینه ریشه عبارات زیر رادیکال مشترک نیست پس این معادله نیز دارای جواب نیست.

$$\sqrt{3x-2} + \sqrt{4x-3} = 0$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ \text{ریشه } x_1 = \frac{2}{3} & \text{ریشه } x_2 = \frac{3}{4} \end{matrix}$$

گزینه «۴»: عبارات زیر رادیکال ریشه مشترک $x=1$ را دارند، پس این معادله یک ریشه دارد.

$$\sqrt{2x^2+x-3} + \sqrt{x^2+2x-3} = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-1)(2x+3)} + \sqrt{(x-1)(x+3)} = 0$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{ریشه‌ها } x_1 = 1 & x_2 = \frac{-3}{2} & x_3 = 1 & x_4 = -3 \end{matrix}$$

(چیر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۲۲ تا ۲۴)

۱۹- گزینه «۳»

(مهرزاد استقلایان)

$$D_y = x \geq 0, x \neq 3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |x| - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 3 \text{ ریشه‌های ساده} \\ x^y + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ریشه ساده} \\ x - 5\sqrt{x} + 6 = 0 \Rightarrow (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} - 2) = 0 \\ \Rightarrow x = 4, 9 \text{ ریشه‌های ساده} \\ x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3 \text{ ریشه‌های ساده} \end{array} \right.$$

$$\begin{matrix} x & 0 & 3 & 4 & 9 & +\infty \\ y & \text{X} & + & 0 & - & + \end{matrix}$$

$$\Rightarrow (4, 9) \Rightarrow 9 - 4 = 5$$

$$\Rightarrow x = 4, 9 \text{ ریشه‌های ساده}$$

$$\Rightarrow x = \pm 3 \text{ ریشه‌های ساده}$$

$$\Rightarrow x = 4, 9 \text{ ریشه‌های ساده}$$

$$\Rightarrow x = \pm 3 \text{ ریشه‌های ساده}$$

(معادله و نامعادله) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۸۳ تا ۹۳)

۲۰- گزینه «۴»

(رضا یعقوبی)

می‌دانیم طبق اتحاد چاق و لاغر، $(x^3 - 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ است.

پس مخرج مشترک عبارات $(x^3 - 1)$ ، $(x - 1)$ و $(x^2 + x + 1)$ برابر می‌شود.

$$\frac{x-3}{x-1} - \frac{x-1}{x^2+x+1} = \frac{ax^3+bx^2-4}{x^2-1}$$

$$\xrightarrow{\times(x^2-1)} (x-3)(x^2+x+1) - (x-1)^2 = ax^3+bx^2-4$$

$$\Rightarrow x^3+x^2+x-3x^2-3x-3-x^2+2x-1 = ax^3+bx^2-4$$

$$\Rightarrow x^3-3x^2-4 = ax^3+bx^2-4 \quad (x \neq 1)$$

این معادله زمانی بی‌شمار جواب دارد که ضرایب دو عبارت سمت چپ و راست، نظیر به نظیر با هم برابر باشند. در این حالت تمام اعداد به جز $x=1$ (ریشه مخرج) ریشه‌های این معادله محسوب می‌شوند. پس $a=1$ و $b=-3$ و در نتیجه

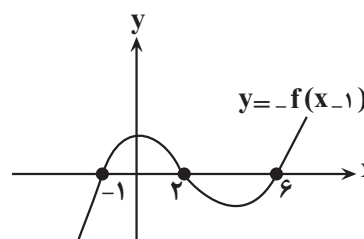
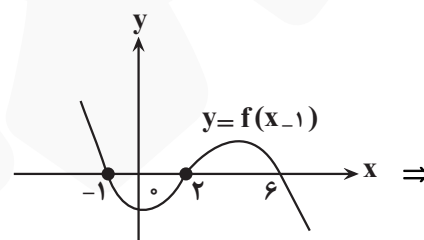
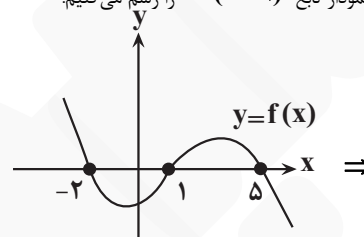
$$\frac{b}{a} = -3 \text{ می‌شود.}$$

(بیر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۹ تا ۲۱ و ۲۴)

۲۱- گزینه «۱»

(ممنوعه‌های هراتی)

ابتدا با استفاده از قواعد انتقال توابع نمودار تابع $-f(x-1)$ را رسم می‌کنیم:



۲۴- گزینه «۴»

(زانیار ممدری)

$$-ax^2 + (2a-1)x + 3 = 0 \Rightarrow S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{2a-1}{a}$$

$$\frac{2x_1 + x_2}{x_1 + x_1 + x_2} - 2 = \frac{-a-1}{a} \Rightarrow x_1 + \frac{2a-1}{a} - 2 = -1 - \frac{1}{a}$$

$$x_1 + 2 - \frac{1}{a} - 2 = -1 - \frac{1}{a} \Rightarrow x_1 = -1$$

ریشه هر معادله در خود معادله صدق می کند:

$$x_1 = -1 \Rightarrow -a - 2a + 1 + 3 = 0 \Rightarrow a = \frac{4}{3}$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه ها} = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{3}{a} = -\frac{3}{\frac{4}{3}} = -\frac{9}{4}$$

(فیر) (ریاضی ۲، صفحه های ۱۱ تا ۱۳)

۲۵-۱۴۶- گزینه «۴»

(اعسان سیفی سلسله)

اگر منحنی را با خطوط $y=1$ و $y=5$ قطع دهیم تفاضل ریشه ها به ترتیب برابر ۲ و ۶ می شود.

$$ax^2 + bx + c = 1 \Rightarrow |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 2$$

$$ax^2 + bx + c = 5 \Rightarrow |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 6$$

$$ax^2 + bx + c - 1 = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{b^2 - 4a(c-1)}}{|a|} = 2$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} \frac{b^2 - 4ac + 4a}{a^2} = 4$$

$$\Rightarrow 4a^2 = b^2 - 4ac + 4a \quad (1)$$

$$ax^2 + bx + c - 5 = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{b^2 - 4a(c-5)}}{a} = 6$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} \frac{b^2 - 4ac + 20a}{a^2} = 36$$

$$\Rightarrow 36a^2 = b^2 - 4ac + 20a \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(2) - (1)} 32a^2 = 16a \Rightarrow \begin{cases} a=0 & \text{غ ق ق} \\ a=\frac{1}{4} & \text{ق ق ق} \end{cases}$$

(ترکیبی) (ریاضی ۱، صفحه های ۷۸ تا ۸۲) (ریاضی ۲، صفحه های ۱۱ تا ۱۸)

۲۶- گزینه «۳»

(سامان شرف قراپولو)

$$f(x) = ax^2 + bx - 1 \quad a < 0 \quad b > 0$$

$$-\frac{\Delta}{4a} = 2 \Rightarrow \Delta = -8a \quad (1)$$

طول پاره خط AB همان اختلاف ریشه های سهمی است:

$$|x_A - x_B| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \xrightarrow{a < 0} \frac{\sqrt{\Delta}}{-a} \Rightarrow \sqrt{\Delta} = -4a$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \Delta = 16a^2 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} 16a^2 = -8a \Rightarrow 16a^2 + 8a = 0$$

$$\Rightarrow 8a(2a + 1) = 0 \xrightarrow{a \neq 0} a = -\frac{1}{2} \quad \checkmark$$

$$\Delta = -8a \xrightarrow{a = -\frac{1}{2}} b^2 - 2 = 4 \Rightarrow b^2 = 6 \xrightarrow{b > 0} b = \sqrt{6}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{6}x - 1 \Rightarrow f(\sqrt{6}) = 2 \quad \checkmark$$

نکته: اگر x_1 و x_2 محل برخورد سهمی $y = ax^2 + bx + c$ با محور x ها (جواب های

معادله $ax^2 + bx + c = 0$) باشد:

$$|x_1 - x_2| = \left| \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right| = \left| \frac{2\sqrt{\Delta}}{2a} \right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

(ترکیبی) (ریاضی ۱، صفحه های ۷۸ تا ۸۲) (ریاضی ۲، صفحه های ۱۸ تا ۱۹)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۱)

۲۷- پاسخ: گزینه ۴

اولاً $x \geq 0$ ، ثانیاً $n \in \mathbb{N}$ پس باید x مربع کامل باشد.

$$x = 0 \Rightarrow \sqrt{2n} = n \Rightarrow \begin{cases} n = 0 \text{ غ ق ق} \\ n = 2 \end{cases}$$

$$x = 1 \Rightarrow \sqrt{1+2n} = n \Rightarrow 1+2n = n^2 - 2n + 1 \Rightarrow n = 4$$

$$x = 4 \Rightarrow \sqrt{4+2n} = n-2 \Rightarrow 4+2n = n^2 - 4n + 4 \Rightarrow n = 6$$

$$x = 9 \Rightarrow \sqrt{9+2n} = n-3 \Rightarrow 9+2n = n^2 - 6n + 9 \Rightarrow n = 8$$

$$n = 2, 4, 6, 8 \Rightarrow \text{جمع} = 20$$

پس:

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۴)

۲۸- پاسخ: گزینه ۲

$$\frac{(x-1)(x-m+1)}{x - \sqrt{x^2 - ax + 2}}$$

$$1 - \sqrt{1-a+2} = 0 \Rightarrow 1 - \sqrt{3-a} = 0 \Rightarrow a = 2$$

$$1 - \sqrt{1-a+2} = 0 \Rightarrow 1 - \sqrt{3-a} = 0 \Rightarrow a = 2$$

$$\frac{(x-1)(x-m+1)(x+\sqrt{x^2-2x+2})}{(x-\sqrt{x^2-2x+2})(x+\sqrt{x^2-2x+2})} > 0 \Rightarrow \frac{(x-1)(x-m+1)(x+\sqrt{x^2-2x+2})}{x^2-2x+2} > 0$$

$$2-m+1=0 \Rightarrow m=3$$

در صورت کسر، جمع ضرایب صفر است، بنابراین:

پس $x=1$ باید ریشه مخرج باشد:

به این ترتیب:

بنابراین:

یعنی $a+m=5$.

پاسخ: گزینه ۳

-۲۹

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۱)

ریشه‌های سهمی را α و $k\alpha$ فرض کنید. هدف محاسبه k است. طول رأس سهمی برابر $\frac{\alpha + k\alpha}{2}$ است.

$$f(x) = a(x - \alpha)(x - k\alpha)$$

$$f(0) = 6 \Rightarrow k\alpha^2 = 6$$

$$f\left(\frac{\alpha + k\alpha}{2}\right) = -2 \Rightarrow a\left(\frac{\alpha + k\alpha}{2} - \alpha\right)\left(\frac{\alpha + k\alpha}{2} - k\alpha\right) = -2 \Rightarrow a\left(\frac{k-1}{2}\right)\left(\frac{1-k}{2}\right)\alpha^2 = -2$$

$$a\alpha^2 = \frac{6}{k} \Rightarrow -\frac{6}{k}\left(\frac{k-1}{2}\right)^2 = -2 \Rightarrow \frac{3}{2}(k^2 - 2k + 1) = 2k$$

$$\Rightarrow 3k^2 - 4k + 3 = 0 \xrightarrow{k>1} k = 3$$

رسیدیم به رأس سهمی... 

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad \left[\frac{\alpha + \beta}{2}, f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \right]$$

اگر α و β دو ریشه معادله درجه دوم (سهمی) باشند، آنگاه رأس سهمی برابر است با:

پاسخ: گزینه ۳

-۳۰

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۱)

$$\begin{cases} S = a + b = -\frac{5}{4b} \\ P = ab = \frac{a}{4b} \xrightarrow{a \neq 0} b^2 = \frac{1}{4} \xrightarrow{a < b} b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$S = a + b = -\frac{5}{4b} \Rightarrow a + \frac{1}{2} = -\frac{5}{2} \Rightarrow a = -3$$

دام تستی 

دقت کنید به ازای $a = 0$ در تساوی S به تناقض $4b^2 = -5$ می‌رسیم.

$$y = 4bx^2 + 5x + a = 2x^2 + 5x - 3$$

$$\text{رأس: } A\left(-\frac{5}{4}, -\frac{49}{8}\right)$$

رأس سهمی در ناحیه سوم است.